日本ファジィ学会誌 Vol.10, No.3, pp.401-413 (1998)

解説

尺度の理論†

鷲尾 隆* 元田 浩*

1. はじめに

我々は日常生活や研究・開発を問わず、頻繁に“数量”を用いる。ここでいう数量とは、我々の測定や思考の中で実世界ないしは仮想世界と何らかの繋がりを持つ量である、実際、我々の日常や純粋数学を除く理工学の分野で扱われる数の大半は数量である。数量が一般的に有する最も代表的な属性は、その“値”である。一方、抽象的な数も値を有し、それについては種々の演算や、等値関係・大小関係などの比較、方程式や不等式・論理式など、数学において高度に体系化された理論が整備されている。我々は数量が持つ値という属性についてこのような数学的理論体系を適用し、その間の関係について様々な検証や変換、推論を行うことができる。このような数量の取り扱いは非常に一般的でかつ強力なものであるため、現状の知識情報処理においても、この枠組みが使われることが多い。

しかしながら、純粋数と異なり実世界ないしは仮想世界と何らかの繋がりを持つ数量が持つ属性は，値だけとは限らない。特に物理学などで多く扱われる測定の基準と手順が比較的明確な数量は，“単位”という属性を有する。例えば、速度 $v[m/s]$ は1秒と呼ばれる特定の時間長と1メートルと呼ばれる特定の距離長を基準にとり、1秒間に対象が移動する距離長の1メートルに対する比率を値とするものである。また、数量の中でも集合族上で定義される“測度”も、純粋数ではなく集合族の体や環といった構造やその上の測度としてのファジイ測度・劣測度といった構造の属性を有する。このような数量の値以外の属性についても、従来から少なからず特徴づけを行う研究がなされている。例えば単位については、各数量の有する単位とそれら数量に許容される数学的関係について、“単位次元解析”という理論体系が研究されてきた[1][2]。また、測度についてはその数学的性質や構造に関する“測度論”の体系化が進んでいる[3]。単位も測度も数量が持ち得る重要な属性であるが、上述のように単位に関する議論は、測定の基準と手順が比較的明確な数量に関してのみ意味を持つ。また数量が測度であることは多いが，その議論も数量が割り当てられる対象が一定の構造を持った集合族である、と捉えることが特に必要である場合に意味を持つ。

一方、数量が有する他の一般的属性として“尺度”が挙げられる。尺度とは数量の値がその測定対象と対応づくために満たす数学的規則や変換の構造のことである。後に詳述するが、尺度は連続量ばかりではなく離散量にも定義され、代表的なものには名義尺度、順序尺度、間隔尺度、比例尺度などがある。尺度は単位と同様に数量の測定過程によって特徴づけられる属性であるが、測定対象と数量を対応づける規則の種類によって決まるものである。心理測定における数量には、基準や手順があまり明確ではなく単位がはっきりしないものもあるが、そのような場合でも測定の対応規

† Theory of Scale Types

* Takashi WASHIO and Hiroshi MOTODA
大阪大学 産業科学研究所
Institute for Scientific and Industrial Research, Osaka University

則は明確化でき、尺度を知ることができる場合が多い。尺度は数量を特徴づける属性として、値ほどではないにせよかなり広範に議論可能なものである。このように尺度は数量の一般的属性であるにもかかわらず、その研究の歴史は比較的新しく、今世紀中葉にStevensがはじめてその体系的分類を行った[4]。その後、尺度に関する理論的考察は、公理論的測定論[5],[6]の分野において取り上げられ数学的公理化が進んだ。また、その実験測定上の操作主義による尺度構成法の定式化については、心理学的測定の分野で研究が進められ[7][8]、更には今日、情報処理分野において、主観や感性の評価手法や意志決定支援手法にも生かされている[9]。

このように尺度についても数学的特徴づけがなされ、かつ人間心理に関連する分野を中心として応用が進められている。しかしながら、まだまだ理論的発展の余地は多く、かつ工学的応用の可能性も未開拓である。本論では、尺度に関する上記の主要な研究を振り返りつつ、その数学的定義や特徴を解説する。また、代表的な尺度構成手法に関しても若干の紹介を行う。更に、尺度の数学的性質と上述の単位次元解析の知見を合わせた最近の筆者等の研究を説明し、尺度の性質が複数の数量間の数学的関係を強く制約すること、かつそれに基づいて科学や工学の幅広い分野において新しいモデリング手法を確立できる可能性を紹介する。

2. 尺度の概観

尺度の体系的分類に関して、今世紀中葉にStevensが重要な貢献を行った[4]。彼は、測定過程を“一定の規則によって対象や事象に数を割り当てること”と定義した。そして、異なる規則の下で数が割り当てられれば、異なる種類の尺度と測定が導かれると主張し、幾つかの尺度を分類・定義した。それらを表1にまとめる。この内、“絶対尺度”は彼によって言及されなかったが、後の研究により加えられた[10]。また、彼は“対数間隔尺度”の分類も与えているが、本論では割愛する。表中の“基礎的経験操作”が、測定において値を対象に割り当てる規則を表す。ただし、表中のより上の尺度はより下の尺度の基礎的経験操作を割り当て規則として含む。この詳細については、更に次節で述べる。また、“数学的許容変換”とは、その尺度が有する構造を“不変”に保つような変換のことである。

絶対尺度はいわゆる無次元量であり、数量の定義上、異なる測定方法を通じて導いても常にその値が不変であるので、単位を定義することに意味が認められない量である。例として、2つの長さの比や角度(ラジアン)、流体力学におけるNusselt数、Reynolds数などが挙げられる。“比例尺度”と“間隔尺度”は、物理学や心理学、経済学、社会学などの問題領域において主要な数量尺度である。比例尺度量としては、質量、絶対温度、圧力、時間間隔、周波数、金額などが挙げられる。これらの値はすべて絶対的な原点を基準に定められ、そこから測った2つの測定量の比率はどのような単位を採用しようとも不変である。一方、間隔尺度量には、例えば摂氏や華氏の単位の温度や、エネ

表1 尺度の種類

尺度	基礎的経験操作	数学的許容変換
絶対	絶対的値の等値性の決定	同一群 $x' = x$
比例	比の等値性の決定	相似群 $x' = kx$
間隔	間隔や差の等値性の決定	一般的線形群 $x' = kx + c$
順序	大小関係の決定	等方群 $x' = f(x)$, ここで $f(x)$ は任意の単調増加関数。
名義	対象の等値性の決定	置換群 $x' = f(x)$, ここで $f(x)$ は任意の一対一代入。

ルギー、エントロピー、時刻、音程などがある。これらを測る尺度の原点は絶対的なものではなく、我々の定義によってどのようにも変更可能であり、2つの測定量の差(間隔)の大きさに関する情報しか持たない。これらは単位変換に関しては、任意の2つの間隔の比が不変である。“順序尺度”は、ホテルの格付けにおける星の数など我々の日常における定性的な程度表現や、1つの文章中の単語出現度数の順位のような統計量として多くの例が見られる。これは表現の変更に関して不変な大小順序関係を表し、我々が設定する値の原点や間隔、記号はあくまで便宜的なものである。最後の“名義尺度”は、クラスの席順や人名、記号推論において対象を表す記号などである。これは表現の変更に関して不変な対象の区別を表すに過ぎない。このように測定における対応規則分類の観点を導入することによって、連続量から離散量に至るまで幅広い数量を数学的に特徴づけることが可能となる。

Stevensの研究を受けて、Luceは尺度が有する上記の数学的許容変換に基づき、定量的な尺度である間隔尺度や比例尺度に関し、複数の数量間に許容される一般的関係が限られることを示した[11]。彼は2つの数量に関して、もしそれらが無次元量を介さないで依存関係を持つのなら、その関係はそれら2数量の尺度の性質に依存する基礎的な関数で表されると主張した。例えば今xとyが両方とも比例尺度であり、yがxによって連続関数$y=u(x)$の形で定義されるとする。今、仮にその関係が対数関数、即ち$y=\log x$であると仮定する。表1に示される比例尺度xの許容変換に従えば、xにある正数kを掛け単位を変更することができる。しかしながら、これによって$u(kx)=\log k+\log x$となり、$\log k$分だけyの原点が移動してしまう。これは明らかに比例尺度であるyの許容変換を破ってしまう。従って、xとyの間の関数関係は対数であってはならないことが判る。xとyそれぞれに許容される単位変換は$x'=kx$及び$y'=Ky$であるので、関係$y=u(x)$は$y'=u(x')\leftrightarrow Ky=u(kx)$となる。$y$の単位変換係数$K$は$k$に依存するが、$x$の値には依存しない。そこで、$K$を$K(k)$と表す。従って、連続関数$u(x)$について、以下の制約を得る。

$$[u(kx)=K(k)u(x)]$$

ここでk, Kは単位変換係数であるため、$k>0$及び$K(k)>0$である。$y=u(x)$はxやyの測定対象に関する関係を表し、それらの単位系の取り方には依存しない、即ちkやKの変更について不変である。ルースは比例尺度または間隔尺度の任意の2数量の組み合わせに関し、このような関係制約を考察し、そして$x\geq 0$かつ$u(x)\geq 0$の条件下での$u(x)$の各解を得た。

以上の研究成果を基に、我々は絶対、比例、間隔の3種の尺度に関する2数量間の関係制約を考察し、xと$u(x)$の負値域までを網羅する許容関係の解を導いた。その結果を表2にまとめる。絶対尺度同士、また絶対尺度から他の尺度を導く関係は任意の関数でよい。これは絶対尺度が単位を持たないため、いかなる$u(x)$であっても単位変換に関する不変性が問題にならないためである。一方、逆に1つの比例尺度や間隔尺度から1つの絶対尺度、また1つの間隔尺度から1つの比例尺度を定義することはできない。これは種々の単位の比例尺度や間隔尺度を唯一の絶対尺度に対応づける非定数の関数は存在しないためである。同様に、単位変更の自由度がkとcの2つである間隔尺度を、自由度がkのみの比例尺度に対応づける非定数の関数は存在しない。これら以外の組み合わせでは、興味深い関数関係が導かれる。比例尺度同士ではべき関数の関係のみが許容され、間隔尺度同士では線形な関係のみが許容される。また、比例尺度から間隔尺度を定義する関係では、原点変更を伴うべき関数か対数関数が許容される。これらは何れも、2つの数量関係の単位変更に関する不変性の前提と、各数量の尺度が有する許容変換から帰結されるものである。紙面の都合上、ここではこれらの許容関係に関する証明を省略する[12],[13]。

3. 公理論的な尺度論

Stevensが尺度の分類を行うより遙か以前から、科学の根幹をなす測定という行為に関する様々な議論があった。その中で、19世紀末に熱力学者のHelmholtzは、測定を数学的に厳密に形式化可能な過程と位置づける公理論的測定論を創始した[5][14]。それまでの古典力学や電磁気学と異なり、熱力学では自由エネルギーやエントロピーといった直接測定が不可能でかつ我々にとって抽象的な数量が理論体系の中心を担う。その意味で、Helmholtzは数量やその測定過程を明確に議論する必要性を感じていたと思われる。彼は、数やそれを数える行為などに関する幾つかの定義や自明な公理を設定し、それらを基に測定過程の公理化を目指した。

Helmholtzが公理化を目指した測定は、我々が目的とする数量を原理的に直接測定する手段がある場合であり、これにより得られる数量を“外延量”という。例として、距離や重さ、時間、体積などがある。これらはすべて定規目盛りや天秤釣り合い、振り子の振れ回数、詰め込める立方体の数などによって直接測定できる。外延量測定については、その後、Campbellが計数の公理化[15]を、またMengerが測定の公理化[16]の理論を発展させる。一方、Helmholtzに引き続き、Machは“内包量”に関する測定論を提唱した[17]。これは原理的に他の数量から間接的に誘導して測定されるものである。内包量の例は、温度、密度、加速度、一対比較で得る重みなどである。これらは水銀の体積膨張量への置き換え、重さと体積の商、距離と時間の2重の商、一対比較値の幾何平均などで間接測定される。

更に今世紀後半になって、Krantz等は以上のような測定論の成果を総括的に体系化した[6]。また、そこではそれまでの測定論では扱われなかった数量尺度の公理化が行われた。Krantz等は、上述の外延量と内包量の測定過程が異なることから、測定を“基本的測定(外延的測定)”と“誘導的測定(内包的測定)”に分けて体系化した。これら2種類の測定はその過程が異なるため、その尺度の定義も各々異なる。

3.1 基本的測定と尺度

最初に基本的測定の定式化を述べる[6][10]。

定義1(関係システム) 次のような有限個の系列αを“関係システム”という。

表2 尺度の性質を満たす制約と可能な関係式

No.	尺度の種類 独立(定義)変数	従属(被定義)変数	制約	可能な関係
1	絶対	絶対	$u(x)=u(x)$	$u(x)$: 任意の非定数関数
2	絶対	比例	$u(x)=Ku(x)$	$u(x)$: 任意の非定数関数
3	絶対	間隔	$u(x)=Ku(x)+C$	$u(x)$: 任意の非定数関数
4	比例	絶対	$u(kx)=u(x)$	$u(x)$: 不可能
5	比例	比例	$u(kx)=K(k)u(x)$	$u(x)=\alpha_*\|x\|^\beta$
6.1	比例	間隔	$u(kx)=K(k)u(x)+C(k)$	$u(x)=\alpha_*\|x\|^\beta+\delta$
6.2				$u(x)=\alpha\log\|x\|+\beta_*$
7	間隔	絶対	$u(kx+c)=u(x)$	$u(x)$: 不可能
8	間隔	比例	$u(kx+c)=K(k,c)u(x)$	$u(x)$: 不可能
9	間隔	間隔	$u(kx+c)=K(k,c)u(x)+C(k,c)$	$u(x)=\alpha_*\|x\|+\beta$

1) 表記α_*,β_*はそれぞれα_+,β_+ for $x\geq 0$ and α_-,β_- for $x<0$を表す。

$\alpha=\langle A, R_1, R_2, \ldots, R_n\rangle$

ただし、

A：定義域であり空でない集合、

R_i：$a_1, a_2, \ldots, a_{m_i} \in A$ の関係

$R_i(a_1, a_2, \ldots, a_{mi})$。

定義 2（タイプと相似性） 関係システム α について、各 R_i が A の m_i 個の要素についての関係である時、正整数の系列 $\langle m_1, m_2, \ldots, m_n\rangle$ を α の“タイプ”という。2つの関係システム α 及び $\beta=\langle B, S_1, S_2, \ldots, S_n\rangle$ についてタイプが等しい時、両者は“相似”であるという。

定義 3（同型性（準同型性）） 2つの関係システム α, β について以下の条件が満たされれば両者は“同型（準同型）”である。

1. α, β は相似である。
2. A から B への全単射（全射）f が存在し
   $R_i(a_1, a_2, \ldots, a_{m_i}) \Leftrightarrow$
   $S_i(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{m_i}))$

定義 4（数的及び経験的関係システム） 関係システム α が以下の条件を満たす時、α を“数的関係システム”という。

1. 定義域 A が実数の部分集合。
2. $R_i(i=1,2, \ldots, n)$ が実数の間の関係。

数的関係システムと見なさないものを“経験的関係システム”という。

以上より、基本的測定とその尺度が定義される。

定義 5（基本的測定） 測定対象に認められる経験的な操作や関係の形式的な構造（経験的関係システム）を記述し、それらが適当に選ばれた数・記号間の操作や関係の形式的な構造（数的関係システム）と同型ないしは準同型であることを示すことを“基本的測定”という。

定義 6（基本的測定における尺度） $\langle\alpha, \beta_f, f\rangle$ を“尺度”という。ここで、

α：経験的関係システム、

β_f：満ちた数的関係システム、

f：α から β_f の部分システムへの準同型写像。

“満ちた数的関係システム”とはその定義域が実数全体であるもの、また“部分システム”とはその定義域が元のシステムの定義域の部分集合で、かつ部分システムで成立するすべての関係が元のシステムでの関係に一対一に対応がつくものである。経験的関係システム $\alpha=\langle A, I\rangle$ が以下に述べる“分類システム”の時、名義尺度による測定が可能であることが知られている。

定義 7（分類システム） $\alpha=\langle A, I\rangle$ において、関係 I が A の任意の2つの要素に関するものであるとき，α を“2元システム”という。更に I が全て次の3つの性質を持つ時、I は等値関係、α は“分類システム”という。また、互いに I が成立する要素の集合を“I-等値類”という。

反射律：$\forall a \in A$, $I(a, a)$、

対称律：$\forall a$, $\forall b \in A$, $I(a, b) \Rightarrow I(b, a)$、

推移律：$\forall a$, $\forall b$, $\forall c \in A$, $I(a, b) \wedge I(b, c)$
$\Rightarrow I(a, c)$。

以上の定式化を具体例で説明する。図1に示すような経験的関係システム α を考える。この定義域 A は6つの錘からなる集合$\{a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3\}$のべき集合であり、$A$ 上の関係として上皿天秤が釣り合う現象を上記の等値関係と見なすことができる。すなわち、物理的には困難ではあるが、全く同一の錘集合自身を左右の上皿に乗せれば天秤は釣り合うはずであり反射律が成立する。また、以下の集合のペアについてそれぞれを天秤の左右の上皿に載せて釣り合う場合には、お互いの皿の位置を交換しても同様に釣り合うため対称律が成立する。

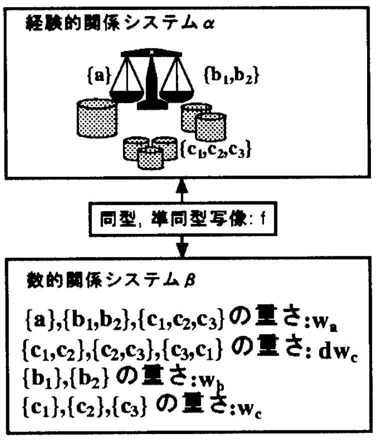


図 1 基本的測定の例

$(\{b_1\},\{b_2\}),(\{c_1\},\{c_2\}),(\{c_2\},\{c_3\}),$
$(\{c_3\},\{c_1\}),(\{c_1,c_2\},\{c_2,c_3\}),$
$(\{c_2,c_3\},\{c_3,c_1\}),(\{c_3,c_1\},\{c_1,c_2\}),$
$(\{a\},\{b_1,b_2\}),(\{b_1,b_2\},\{c_1,c_2,c_3\}),$
$(\{c_1,c_2,c_3\},\{a\})$

また、$\{a,b_1,b_2,c_1,c_2,c_3\}$のべき集合の内、以下の集合の組について2つの集合ペアが釣り合えば残りの集合ペアも釣り合う推移律が成立する。

$(\{c_1\},\{c_2\},\{c_3\}),$
$(\{c_1,c_2\},\{c_2,c_3\},\{c_3,c_1\}),$
$(\{a\},\{b_1,b_2\},\{c_1,c_2,c_3\})$

従って、この経験的関係システム α は分類システムである。これに対して、数的関係システム β の定義域 B を実数の集合とし、α で I-等値類である集合を B 上の同一の実数に割り当てる適当な全射 f を以下のように取る。

$w_a=f(\{a\})=f(\{b_1,b_2\})=f(\{c_1,c_2,c_3\}),$
$w_b=f(\{b_1\})=f(\{b_2\}),$
$w_c=f(\{c_1\})=f(\{c_2\})=f(\{c_3\}),$
$dw_c=f(\{c_1,c_2\})=f(\{c_1,c_3\})=f(\{c_2,c_3\})$
ただし，$w_a,w_b,w_c,dw_c\in B$

このとき、β における関係を実数の等号関係とすると、同一の実数同士に等号関係が成り立つのは自明なので A の要素集合の各写像 f に反射律が成立し、また上記の w_a，w_b，w_c，dw_cにそれぞれ等しい各写像の間には、それぞれ対称律、推移律が成立する。すなわち、実数の等号関係は等値関係 I と見なすことができ、β は分類システムとなる。従って、我々は天秤の釣り合いを等値関係と見なし、かつ準同型写像 f を用いて、等しい重さの錘に同一の実数ラベルを付ける測定を行い名義尺度を得たことになる。

経験的関係システム $\alpha=<A,I>$が以下に述べる“系列”の時、順序尺度による測定が可能であることが知られている。

定義8(系列) $\alpha=<A,P>$を任意の2元システムとする。P が次の3つの性質を持つ時、P を大小関係、α を“系列”という。

非対称律：$\forall a,\ \forall b\in A,\ P(a,b)\Rightarrow\neg P(b,a)$、
推移律：$\forall a,\ \forall b,\ \forall c\in A,\ P(a,b)\wedge P(b,c)\Rightarrow P(a,c)$、
排中律：$\forall a,\ \forall b\in A,\ P(a,b),P(b,a)$の一方のみが必ず成立。

関係システムの定義域 A に等値関係を満たす要素が含まれる場合、すなわち $\alpha=<A,I,P>$では、I-等値類毎にグループ化して各々1つの要素で代表させて表し、“商集合” A/I に置き換えれば、α を $\alpha/I=<A/I,P>$として系列化できる。この時、α/I は順序尺度による測定が可能である。

上記図1の例で、経験的関係システム α の定義域 A を I-等値類毎にまとめた α/I について、A/I の要素の関係 $P(r,s)$を、上皿天秤の両皿それぞれに錘の集合 r と s を置いた時、s が載った皿の側に傾くこととすれば、$P(r,s)$は上記の系列における定義を満たす。また、数的関係システム β の定義域 B の要素の関係 $P(w_r,w_s)$を不等号 $w_r<w_s$とした時、全射 f を先の名義尺度における対応条件に加えて、α で s が載った皿の側に傾く場合に $w_r<w_s$の関係を満たす実数値を各 w_a，w_b，w_c，dw_cに割り当てるものと定めれば、β も準同型な系列となる．この時，全射 f による錘の集合に対する実数の割り当て $w_c<w_b<dw_c<w_a$ は順序尺度となる。

更に、経験的関係システム $\alpha=<A,I>$が以下に述べる“差システム”の時、間隔尺度による測定が可能であることが知られている。

定義9(差システム) $\alpha=<A,D>$において、関係 D が A の任意の4つの要素に関するものであるとき、α を“4元システム”という。この時 A の要素$\{a,b,c,d,e,f\}$に以下の公理が成立すれば、α を“差システム”という。

$P(a,b)\not\Leftrightarrow D(a,b,a,a)$、
$I(a,b)\Leftrightarrow D(a,b,b,a)\wedge D(b,a,a,b)$、
$D(a,b,c,d)\wedge D(c,d,e,f)\Rightarrow D(a,b,e,f)$、
$D(a,b,c,d),D(c,d,a,b)$のうち一方が必ず成立、

$D(a,b,c,d) \Rightarrow D(a,c,b,d)$、
$D(a,b,c,d) \Rightarrow D(d,c,b,a)$、
$\exists c \in A,\ D(a,c,c,b) \wedge D(c,b,a,c)$、
$P(a,b) \wedge \neg D(a,b,c,d) \Rightarrow$
$\quad \exists e \in A,\ P(a,e) \wedge P(e,b)$
$\qquad \wedge D(c,d,a,e)$、
$M^1(a,b,c,d) \Leftrightarrow D(a,b,c,d)$
$\qquad \wedge D(c,d,a,b) \wedge I(b,c)$、
$\exists e,\ \exists f \in A,\ M^n(a,b,c,d) \Leftrightarrow$
$\quad M^{n-1}(a,b,e,f) \wedge M^1(e,f,c,d)$、
$\exists e,\ \exists f \in A,\ \exists$整数 n,
$\quad P(a,b) \wedge D(a,b,c,d) \Rightarrow M^n(c,e,f,d)$。

ここで M_n は D から再帰的定義される c と d の間の $n+1$ 等分関係である。関係システムの定義域 A に等値関係を満たす要素が含まれる場合には、定義域 A を“商集合” A/I に置き換え $\alpha/I=<A/I,D>$ を考えば差システムとなる。この時，α/I は間隔尺度による測定が可能である。

図1の例で、α/I について A/I の要素の関係 $D(r,s,t,u)$ を、上皿天秤の左皿に錘の集合 r と u 及び右皿に s と t を置いたとき左に傾く関係であるとすると、α/I は差システムとなる。また、数的関係システム β の定義域 B の要素の関係 $D(w_r,w_s,w_t,w_u)$ を $(w_s-w_r) \leq (w_u-w_t)$ とした時、全射 f を先の名義尺度、順序尺度の対応条件に加えて、α/I で関係 $D(r,s,t,u)$ が成立する場合に β で $D(w_r,w_s,w_t,w_u)$ の関係を満たす実数値を各 w_a，w_b，w_c，dw_c に割り当てるものと定めれば、β も準同型な差システムとなる。このとき、$w_a=w_c+4(w_b-w_c)$，$dw_c=w_c+2(w_b-w_c)$ の関係が得られ、全射 f による実数の割り当ては間隔尺度となる。このような f は唯一ではなく、α/I に準同型な2つの数的関係システム β_1,β_2 を構成する f_1,f_2 は線形変換 $f_2=k\cdot f_1+c$ の関係にある。

また、同じく2つの差システム α/I と β に関して、$A/I \times A/I$ から $B \times B$ への写像 $f(r,s)=w_s\text{-}w_r$ かつ $f(\phi,r)=w_r$ を取るとき、α/I は比例尺度により測定される。この場合、図1の例では、β の $f(\phi,c_1)=w_c$ 及び $f(c_1,\{c_2,c_3\})=dw_c\text{-}w_c$ に関して同型な α/I における比較操作では両者が釣り合うので、$dw_c=2w_c$ であることが判る。これと先の w_a,w_b との関係式より、$2w_b=3w_c$，$w_a=3w_c$ が導かれ、比例尺度が構成される。このような f は唯一ではなく、α/I に準同型な2つの数的関係システム β_1,β_2 を構成する f_1,f_2 は相似変換 $f_2=k\cdot f_1$ の関係にある。以上の公理化により明らかになった尺度の特徴は、Stevens が掲げた表1の内容と一致する。

3.2 誘導的測定と尺度

次に誘導的測定の定式化を述べる。

定義 10(誘導的測定システム)

$\beta=<B,f_1,f_2,\ldots,f_n>$ を“誘導的測定システム”という。ここで、

B：測定の対象たる事物の集合(空でない)、
f_i：B または積集合 B^m 上の実数値関数。

定義 11(誘導的尺度) 3項組 $<\beta,R,g>$ を“誘導的尺度”という。ここで、

β：誘導的測定システム、
g：B または積集合 B^m 上の実数値関数、
$R((f_1,f_2,\ldots,f_n),g)$：$f_1,f_2,\ldots,f_n$ と g の対応関係。

定義 12(誘導的測定) 誘導的測定システム β が与えられたとき、指定した関係 $R((f_1,f_2,\ldots,f_n),g)$ が成立するような B(または B^m)上の実数値関数 g を定めることを“誘導的測定”という。

以上の定式化を具体例で説明する。図2に示すような誘導的測定システム β を考える。この場合、$B=\{a,b,c\}$ かつ $f_1=m, f_2=V$ である。ここで $g=d$ として $R((m,V),d) \equiv d=m/V$ とすると、d は $V=0$ 以外の条件では必ず定まる。従って、$m \geq 0, V>0$ において誘導的測定が可能であり、いわゆる密度 d が導かれる。

特に誘導的測定によって導かれる尺度に絶対尺度がある。誘導的測定システム $\beta=<B,f_1,f_2,\ldots,f_n>$ が与えられ、各 f_i は比例尺度とする。この時、$R((f_1,f_2,\ldots,f_n),g) \equiv g=\prod_{i=1}^{n} f_i^{r_i}$ を満たす関数 g が存在し、かつ各単位系の変換 $f'_i=k_i\cdot f_i(i=$

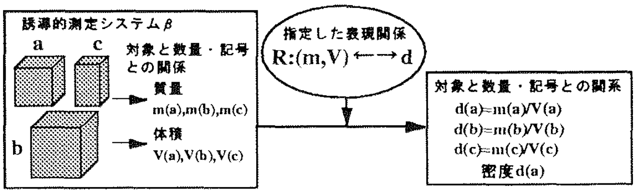


図 2 誘導的測定の例

$1,2,...,n$)について常に$\prod_{i=1}^{n} k_i^{\gamma_i}=1$であるとする。このとき、$<\beta, R, g>$は絶対尺度と呼ばれる。このような絶対尺度は一意に決定するので、許容変換は恒等変換$g'=g$である。

誘導的測定で定義される数量gは、他の数量f_iから派生的に導かれるため、その尺度の性質を基礎的測定の場合のように自身が満たす公理によって特徴づけることは困難である。しかしながら、その数量が表1に示される基本的測定における各尺度の数学的許容変換のいずれかと同じ形式の変換に従う場合、その数量の形式的な尺度タイプを類別することは可能である。以上のような公理論的規則により，尺度を構成したり与えられた数量の尺度を類別できる。

4. 操作主義と尺度構成法

単位次元解析でも有名なBridgmanは、測定過程を操作主義の立場から定式化しようとした[18]。すなわち、測定の手順によって測定過程や測定数量の特徴づけを行おうとした。しかし、この考えによれば、“ものさしで測った長さ”と“トランシットで光学的に測った長さ”は異なる単位を持つことになり、一般性のある数量間の関係など求めることはできなくなってしまう[14]。

しかしながら、一般に測定が非常に困難な対象についても、測定過程の操作手順を明確に定式化することで結果の再現性を高め、科学的な基礎を固めようとする動きが、心理学的測定の分野で進んだ[7][8]。心理学的測定では幾つかの重要な仮定を置く[10]。

仮定 1(内部機構の仮定) 人間に対する入力として刺激X、それに対応する出力として直接観察可能な顕在数量yを考える。このとき、未知の潜在数量ξを考え、

$$\xi=\varphi(X),$$
$$y=\psi(\xi)$$

を仮定する。φ, ψも未知である。

仮定 2(実数連続体の仮定) 刺激X_iに対応する潜在数量ξの値ξ_iは実数値である。

仮定 3(関数の仮定) φはXからξへの全射である。すなわち、異なる刺激Xに同じξの値が対応することがあり得る。一方、ψはξからyへの全単射である。すなわち、異なるξの値には必ず異なるyの値が対応する。

このような実数連続体の仮定は、人間内部の心理状態が実数値ないしはその集まりで捉えられると仮定することに等しく、このような人間内部の状態の集合を“心理学的連続体”という。また、関数の仮定より、yを知れば$\xi=\psi^{-1}(y)$によって内部状態を知ることができることになる。

以上のような枠組みにおいて、はじめに間隔尺度としてξを実験的に評価する方法の1つを紹介する。これは“カテゴリ評定法”と呼ばれるものである[7]。

実験手続

1. 一群の刺激$X_1, X_2, ..., X_n$がある。
2. 各刺激X_jは被験者$i(i=1,2,...,N)$に無作為に1つずつ提示される。
3. 被験者iは各刺激を、実験者によって明確に指定された1つの属性(美しさ、好ましさ、硬さなど)に関して、あらかじめ定められた次のような評定形式で評定しなければならない。
   (a) 被験者には、1つの属性に関して順序づけられたm段階のカテゴリからなるカテゴリ系列$\{C_k; k=1,2,...,m\}$が用意される。
   (b) 被験者は1つの刺激X_jが提示されるごとにただ1つのカテゴリC_kによって刺激X_jを以下のように評定しなければならな

い。

$$s_{jki}=\begin{cases}1 & i\text{が}X_j\text{を}C_k\text{に評定したとき}\\ 0 & i\text{が}X_j\text{を}C_k\text{に評定しないとき}\end{cases}$$

(c) 被験者 i はこの評定を n 個の刺激 $\{X_j: j=1,2,\ldots,n\}$ すべてについて行わねばならない。

尺度値の求め方

1. 各カテゴリ C_k にその順序に従って重み w_k(通常は整数値)を割り当てる。
2. n 個の刺激がそれぞれ m 個のカテゴリによって評定された被験者 N 人すべてについての度数分布を f_{jk} とする。
3. 以下を刺激 X_j に関する尺度値 R_j とする。

$$R_j=\frac{1}{L_j}\sum_{k=1}^{m} w_k f_{jk}$$

ここで L_j は刺激 X_j が評定された度数である。

この場合、s_{jki} が顕在数量であり、R_j が潜在数量に相当する。各カテゴリの重み w_k に与える整数の間隔や原点は任意であり、R_j は明らかに間隔尺度となる。

比例尺度として ξ を実験的に評価する方法として代表的なものに“マグニチュード推定法”がある[10]。

実験手続

1. 一群の刺激 $X_0, X_1, \ldots, X_n$ がある。
2. はじめに基準となる刺激 X_0 が被験者に示され、その評定量 R_0 を実験者が定めた一定の数値 C_0 とするように指示される。
3. 被験者は他の刺激 $X_j(j=1,2,\ldots,n)$ に対する評定量 R_j を C_0 に関して相対的な数値で回答するように求められる。

これは R_j が潜在数量であると同時に顕在数量でもあると見なす場合である。このようにして求めた R_j は比例尺度となる。

これ以外にも比例尺度や間隔尺度、順序尺度などを構成する方法は多数提案されており、解説文献も多いのでこれ以上の説明は割愛する[19]。

5. 尺度論の発展と応用

以上、尺度論や尺度構成法について見てきたが、最後に今後の尺度論の発展を展望する上での1つの材料として、尺度論と単位次元解析の結果を結びつける理論とその工学的問題への応用について、最近の筆者等の研究を紹介する。単位次元解析の分野では、今世紀前半に以下の2つの定理が導かれている[1,2]。

定理 1(Product Theorem) 相対的強度(absolute significance of relative magnitude)を表す数量 $x, y, \ldots$ をそれから誘導される数量 f に関係づける関係式は、以下の形式を有する。

$$f=Cx^a y^b z^c\ldots$$

ここで $C, a, b, c, \ldots$ は定数である。

定理 2(Buckingham Π－theorem) もし $\phi(x, y, \ldots)=0$ が1つの完全な式であり、各数量 $x, y, \ldots$ が相対的強度を表すのであれば、それを以下のような形式に書き換え可能である。

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r})=0$$

ここで n は ϕ の引き数の数であり、r は $x, y, \ldots$ の基本単位の数である。またすべての i について、Π_i は無次元量である。

上記の定理は、各数量が相対的強度を表すことを前提としているが、これは数量が比例尺度に限られることを意味する．また、基本単位とは、長さ $[L]$、質量 $[M]$、時間 $[T]$ のように ϕ において他の次元とは独立に数量の測定目盛を決める単位次元のことである。単位次元解析では無次元量、すなわち絶対尺度の数量 Π_i を定義する式 $\rho_i(\Pi_i, x, y, \ldots)=0$ を“レジーム式”と呼び、式 $F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r})=0$ を“アンサンブル式”と呼ぶ。式 $F=0$ の引数はすべて絶対尺度量であるため、アンサンブル式の形式は定理 *Buckingham* Π-*theorem* には従わず任意のものが許される．

一方、第2節で述べたように、間隔尺度や比例尺度の数量間の直接関係式は特定の関数形に限られる。表2の5番目の2つの比例尺度同士の許容

関係はべき乗関係となっているが、実は上記の *Product Theorem* は、その多数量系への一般化になっている。このように比例尺度同士の多数量系の一般的許容関係式については、既に単位次元解析によって昔から明らかにされている。しかしながら、もう一つの代表的な連続数量の尺度である間隔尺度をも含む系に関する、一般的な許容関係式の形式は明らかにされて来なかった。そこで、筆者等は尺度論の成果を踏まえ、*Product Theorem* と *Buckingham* Π-*theorem* を間隔尺度の数量を含めて表現される関係に拡張し、以下の2つの定理を得た[20],[21]。

定理3(Extended Product Theorem) 比例尺度の属性量の集合 R と間隔尺度の数量の集合 I について、各 $x_i \in R \cup I$ を誘導量 Π に関係づける関数 ρ は、以下の2式の何れかの形式を取る。

$$\Pi = \Big(\prod_{x_i \in R} |x_i|^{a_i}\Big)\Big(\prod_{I_k \in C}^{n}\Big(\sum_{x_j \in I_k} b_{kj}|x_j| + c_k\Big)^{1_k}\Big)$$

$$\Pi = \sum_{x_i \in R} a_i \log|x_i|$$
$$+ \sum_{I_k \in C_{\bar{g}}} a_k \log\Big(\sum_{x_j \in I_k} b_{kj}|x_j| + c_k\Big)$$
$$+ \sum_{x_l \in I_g} b_{gl}|x_l| + c_g$$

ただし、R も I も空集合であることが可能である。また、C は I の1つの被覆であり、$C_{\bar{g}}$ は $I\text{-}I_g$ $(I_g \subseteq I)$ の1つの被覆である。Π は間隔、比例、絶対何れの尺度であってもよい。また、各係数は定数である。

法則式に現れる各数量が比例尺度の数量または間隔尺度の数量である限り、直接的な単位変換関係を有する数量同士の関係は必ず上記に従う。

定理4(Extended Buckingham Π-theorem) $\phi(x, y, z, \ldots) = 0$ が1つの完全な方程式である場合、かつその中の各属性量が間隔、比例、絶対尺度の何れかである場合には、$\phi = 0$ は以下の形式に書き換え可能である。

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r-s}) = 0$$

ここで、n は ϕ の引数の数、r と s はそれぞれ $x, y, z, \ldots$ の属性量が有する基礎単位及び基礎原点の数である. また全ての i について、Π_i は絶対尺度量であり、各々 *Extended Product Theorem* のレジーム式により求められる。

ここで基礎原点とは、摂氏温度において1気圧下の氷点を原点にして測定がなされるように、間隔尺度の測定において基準点として人為的に選ばれる原点のことである。この定理においても、式 $F=0$ の引数はすべて絶対尺度の数量であるため、アンサンブル式の形式は任意のものが許される。

以下の式は定理3及び定理4の実例である。これは振り子の振動解である。

$$\theta = \theta_a \sin((t - t_0)(g/l)^{1/2})$$

ここで、θ は振り子の偏角、θ_aはその振幅、t は時刻、t_0は基準時刻、g は重力加速度、l は振り子の紐の長さである。この内、$\{\theta, \theta_a, g, l\}$は比例尺度であり、$\{t, t_0\}$は間隔尺度である。この式は以下のように変形可能である。

$$\Pi_1 = \sin(\Pi_2) \qquad (1)$$
$$\Pi_1 = \theta/\theta_a \qquad (2)$$
$$\Pi_2 = (t - t_0)(g/l)^{1/2} \qquad (3)$$

このように、1つのアンサンブル式と2つのレジーム式に書き換えることができ、レジーム式(2)及び(3)は定理3のはじめの式に従う。ここで数量の数は全部で6個なので $n=6$、θ, θ_aは基礎単位[*deg.*]を、t, t_0, g は基礎単位[*s*]、g, l は基礎単位[*m*]を共有し合計 $r=3$、更に t, t_0は時刻を計る基礎原点を共有するので $s=1$ である。従って、定理4によればレジーム式の総数は $n\text{-}r\text{-}s=2$ となり、これは上記の書き換え結果と一致する。

以上のように，数量の尺度に関する数学的制約は数量間の許容関係に極めて強い制限を与えており、数学的に受け入れ可能な関係式の形式の多くの部分を決めてしまうことが分かる。また、換言すればこれらの定理を満たす範疇の式しか、妥当な関係式とは呼べない。もし、測定データから上記のような変形を許さない関係式が得られたとしても、その式は対象が満たすべき本来の関係を表したもの(例えば物理学で言えば第一原理を表す法則式)ではなく、単なる実験式に過ぎないことが

分かる。そこで、測定データに当てはまり、かつ上記2つの定理の条件を満たす関係式を見つけることができれば、それは測定対象を支配する第一原理法則やそれに基づくモデルである可能性が極めて高い関係式を得ることができるはずである。筆者等はこの考えに基づき、計算機が測定実験手順をアレンジしながら、上記定理の条件を満たす数量間の関係式を探索発見する"*Smart Discovery System* (*SDS*)"を開発した[21]。*SDS* は、現状では測定対象の数値シミュレータを対象と見なし、そのシミュレータが有する対象式を知らずに実験操作して種々の数量の値の組みを表すデータを取得する。*SDS* のアルゴリズムの詳細は省略するが、$O(n^2)$、すなわち数量の数の2乗に比例する程度の計算量で探索を終了できる。以下に、*SDS* が探索発見できた対象系の例を示す。

図3は3石トランジスタからなる一定時間内の光量増加率を測定する回路である。この系は以下の18属性量からなる式で表される。

$$\left(\frac{R_3h_{fe2}}{R_3h_{fe2}+h_{ie2}}\frac{R_2h_{fe1}}{R_2h_{fe1}+h_{ie1}}\frac{rL^2}{rL^2+R_1}\right)(V_1-V_0)-\frac{Q}{C}-\frac{Kh_{ie3}X}{Bh_{fe3}}=0 \qquad (4)$$

ここで、L, r は光量と光素子 *Csd* の感度、X, K, B は表示電流計針の位置、針バネの定数、磁石磁場の強さを表す。また、h_{ie_i}, h_{fe_i}は、それぞれ i 番のトランジスタのベース入力インピーダンスと電流増幅率を表す。更に V_0, V_1は電源の正極、負極の電位、R_iは各抵抗の抵抗値、C, Q はコンデンサの容量、蓄積電荷を表す。ここで、電位は間隔尺度及び電流増幅率は無次元量であるため、$R=\{L, r, R_1, R_2, R_3, h_{ie1}, h_{ie2}, h_{ie3}, Q, C, X, K, B\}$が比例尺度の集合，$I=\{V_1, V_2\}$が間隔尺度の集合、$A=\{h_{fe1}, h_{fe2}, h_{fe3}$が絶対尺度の集合となる。*SDS* はこの系に関して実験測定データと尺度に関する情報だけから、以下のような1つのアンサンブル式と8個のレジーム式を発見した。

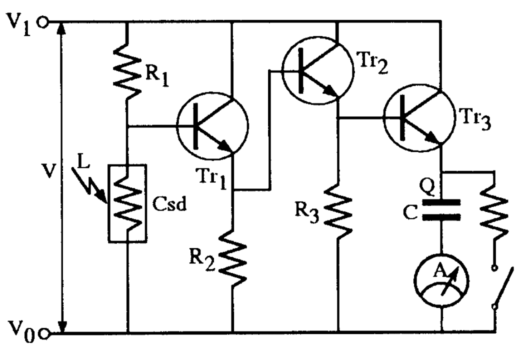


図 3 光測定の電子回路

$$1=(\Pi_4+\Pi_5)^{-1.0}+\Theta_1,$$
$$\Theta_1=\Theta_2\Pi_3\Pi_8+\Theta_2+\Pi_3\Pi_8,$$
$$\Theta_2=\Pi_1\Pi_2\Pi_6\Pi_7+\Pi_1\Pi_6+\Pi_2\Pi_7,$$
$$\Pi_1=R_1r^{-1.0}L^{-2.0},$$
$$\Pi_2=h_{ie1}R_2^{-1.0},$$
$$\Pi_3=h_{ie2}R_3^{-1.0},$$
$$\Pi_4=h_{ie3}XKB^{-1.0}(V_1-V_0)^{-1.0},$$
$$\Pi_5=QC^{-1.0}(V_1-V_0)^{-1.0},$$
$$\Pi_6=h_{fe1},$$
$$\Pi_7=h_{fe2},$$
$$\Pi_8=h_{fe3}$$

ここでアンサンブル式は形式がコンパクトになるように、媒介変数 Θ_1, Θ_2を導入して最初の3つの式に分けて示している。各レジーム式をアンサンブル式に代入すれば、元の対象回路モデル式(4)が得られることが確認された。

更に物理系以外の分野についても適用を試みた。簡単な例では、音の周波数 f とそれに対して人間が感じる音程 I の関係は *Fecher* の法則として知られる。f は比例尺度であり、I は主観的数量であるがカテゴリ評定を用いたとすると間隔尺度となる。これに基づいて、以下の2種類の関係式候補が得られた。

$$I=\alpha f_\beta+\gamma, \text{ or } I=\alpha\log f+\beta$$

この内、後者が Fechner の法則に合致する。

以上のように、数量が有する尺度という属性の情報を利用することで、かなり複雑な対象や人間系が絡むような対象についても、数学的な妥当性を保証する法則式やモデル式を体系的に見いだすことが可能となる。

6. おわりに

本論では、尺度に関する主要な研究を振り返りつつ、その数学的定義や特徴を解説し、また、代表的な尺度構成手法に関して若干の紹介を行った。更に、尺度と単位次元解析の知見を合わせた最近の筆者等の研究を説明し、尺度の性質が複数の数量間の数学的関係を強く制約すること示した。数量が有する“値”という属性を中心とした従来の推論や評価・システム同定、モデリング手法に比べ、“尺度”というやはりかなり一般的に知られる数量の属性に関する種々の制約や考慮を導入することで、これまで解析者の主観に頼っていた対象に関する解釈・理解や複雑ないしは大規模な対象系の把握が、より体系的に行えるようになる。このような理論と手法を背景として、科学や工学の幅広い分野において新しい推論や評価・同定、モデリング手法を確立できる可能性があると考えている。

謝 辞

本稿の執筆にあたって、貴重な資料を提供いただきました、京都大学大学院情報学研究科の片井修先生に感謝いたします。

参 考 文 献

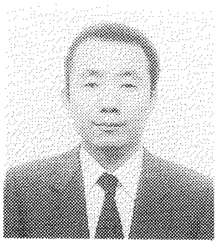
[1] P.W. Bridgman：Dimensional Analysis, Yale University Press, New Haven, CT(1922).
[2] E. Buckingham：On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations, Physical Review, Vol.IV, No.4, pp.345-376(1914).
[3] 室伏俊明：ファジィ測度とファジィ積分－非加法的集合関数とその積分－, 日本ファジィ学会誌, Vol.6, No.6, pp.1083-1093(1994).
[4] S.S. Stevens：On the Theory of Scales of Measurement, Science, Vol.103, No.2684, pp.677-680(1946).
[5] H.V. Helmholtz：Numbering and Measuring from Epistemological Viewpoint, Philosophische Aufsatze(1887).
[6] D.H. Krantz, et al.：Foundation of Measurement, Academic Press., New York, Vol.1, 2 (1971).
[7] W.S. Torgerson： Theory and Methods of Scaling, John Wiley, New York(1958).
[8] L.L. Thurstone：The Measurement of Values, The University of Chicago Press, Chicago (1958).
[9] T.L. Saaty and J. Alexander： Conflict Resolution, the Analytic Hierarchy Approach, Praeger, New York (1989).
[10] 齋藤, 小川, 野嶋：データ解析 (2)： 一次元尺度構成に関する総合報告, 総研紀要, 日本ユニバック総合研究所, Vol.2, No.2, pp.17-226 (1972).
[11] R.D. Luce：On the Possible Psychological Laws, The Psychological Review, Vol.66, nNo.2, pp.81-95(1959)
[12] T. Washio and H. Motoda：Scale-Based Reasoning on Possible Law Equations, Working Papers of QR'96：Tenth Int. Workshop on Qualitative Reasoning, Stanford Sierra Camp, Fallen Leaf Lake, California, USA, pp255-264(1996).
[13] T. Washio and H. Motoda：Discovery of Possible Law Equations by Combined Use of Scale-Based and Data-Driven Reasoning, Working Papers of PKAW'96：The 1996 Pacific Rim Knowledge Aquisition Workshop, Coogee Beach, Sydney, Australia(1996)
[14] 高田誠二：計測の科学的基礎－情報生産論への道, コロナ社(1987).
[15] N.R. Campbell：What is Science?(1921).
[16] K. Menger, Mensuration and Other Mathematical Connections of Observable Material, Churchman Eds.(1959).
[17] E. Mach：Die Principien der Warmelehre (1896).
[18] P.W. Bridgman：The Logic of Modern Physics (1927)
[19] 田中良久：心理学的測定法, 東京大学出版会 (1977).
[20] T. Washio and H. Motoda：Discovery of First Principle Based on Data-Driven Reasoning, Proceedings of First Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (PAKDD-97), World Scientific, pp. 169-182(1997)
[21] T. Washio and H. Motoda：Discovering Admissible Models of Complex Systems Based on Scale-Types and Identity Constraints, Proceedings of Fifteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-97), Vol.2, pp.810-817(1997).

(1998年4月20日 受付)

［問い合わせ先］

〒567-0047
茨木市美穂ヶ丘8-1
大阪大学 産業科学研究所
鷲尾 隆
TEL：06-879-8541
FAX：06-879-8544
E-mail：washio@sanken.osaka-u.ac.jp

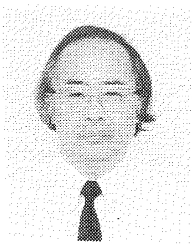
著 者 紹 介



鷲尾 隆（わしお たかし）

大阪大学 産業科学研究所

1983年 東北大学工学部原子核工学科卒業．1988年 東北大学大学院原子核工学専攻博士課程修了．工学博士．1988年から1990年にかけてマセチューセッツ工科大学原子炉研究所客員研究員．1990年 ㈱三菱総合研究所入社．1996年 退社．現在，大阪大学産業科学研究所助教授（知能システム科学研究部門）原子力システムの異常診断手法に関する研究，定性推論に関する研究を経て，現在は人工知能の基礎研究，特に科学的知識発見，データマイニングなどの研究に従事．著書に“{¥it Expert Systems Applications within the Nuclear Industry}”，American Nuclear Society，「知能工学概論」：第2章エージェント（共著，廣田 薫 編，昭晃堂）など．日本ファジイ学会，人工知能学会，計測自動制御学会，日本原子力学会，AAAI，各会員．



元田 浩（もとだ ひろし）

大阪大学 産業科学研究所

1965年 東京大学工学部原子力工学科卒業．1967年 東京大学大学院原子力工学専攻修士課程修了．同年 ㈱日立製作所入社．同社中央研究所，原子力研究所，エネルギー研究所，基礎研究所を経て1995年退社．現在，大阪大学産業科学研究所教授（知能システム科学研究部門）原子力システムの設計，運用，制御に関する研究，診断型エキスパート・システムの研究を経，現在は人工知能の基礎研究，特に機械学習，知識獲得，知識発見などの研究に従事．工学博士．認知科学会，人工知能学会，情報処理学会，日本ソフトウエア科学会，AAAI，IEEE Computer Society，各会員．