日本認知科学会『認知科学』5 巻 2 号, pp. 80-93. 共立出版.

●特集論文

属性変量の尺度認知に基づく構成的法則発見手法

鷲尾 隆, 元田 浩

The "laws" in science are not the relations established by only the objective features of the nature. They have to be consistent with the assumptions and the operations in the process where we identify these relations, and also they have to be comprehensive for us and usable in the analysis of the nature. The objectives of this paper are to discuss a mathematical foundation of measurement in terms of representational change, to provide extended characterization of scientific laws based on the foundation, and to propose a method to discover the laws. First, the conditions of a "scientific law" that must hold among measured quantities are analyzed. Second, the axiomatic foundation of measurement processes and cognitive scales of feature quantities are discussed. Third, the strong constraints on the admissible formulae of the laws are shown on the basis of the foundation. Forth, a method is proposed to discover laws by successively composing the constraints that are derived from the required conditions and the experimental data. Finally, the validity and the performance of the method are demonstrated and evaluated through computer simulations.

Keywords: 科学的法則, 表象クラス, 科学的知識発見, 尺度, 測定論,
scientific law, representation class, scientific discovery, scale type, measurement theory

1. はじめに

我々人間は自然現象や社会現象を観察したとき，それらの中に認められる事物間のある種の普遍的な関係を他の諸々の関係から峻別して，"法則" と呼ぶ. 特に定量ないし半定量的な測定により得られる属性量に関する数学的関係は，"法則式" と言われる. 通常，これら法則や法則式は，対象に生起する現象自体に客観的に内在するのもと理解されており，我々は観察を通じて法則やその式を見いだし，更にそれを用いて現象を解明しようとする.

しかしながら，我々が法則や法則式と呼ぶ事物間の関係は，単に対象の現象自体に客観的かつ普遍的に内在すると述べるだけで捉えきれる関係であるとは考えにくい. たとえば，円管内を強制的に乱流液体が流れているとき，液体と管壁間の熱伝達特性は Dittus-Boelter の式

$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4} \tag{1}$$

ただし,$Nu = hd/\lambda, Re = \rho ud/\eta, Pr = \eta c_p/\lambda$ で表されることが知られている (片山, 1986). ここで $h[W/(m^2{\cdot}{}^\circ K)]$: 液体と管壁間の熱伝達率, $d[m]$: 円管直径, $\lambda[W/(m{\cdot}{}^\circ K)], \rho[kg/m^3], u[m/s], \eta[Pa{\cdot}s], c_p[J/(kg{\cdot}{}^\circ K)]$: それぞれ液体の熱伝導率, 密度, 流速, 粘性係数, 定圧比熱である. この関係は明らかに我々の主観とは無関係に成立し，また円管内の乱流液体に関し殆どの場合に成立する関係である. しかし，これはあくまでも熱伝達現象の特性を表す "単なる実験式" であり，通常，"法則式" とは呼ばない. 一方，質量がそれぞれ $M_1, M_2[kg]$ である２つの物体が，距離 $R[m]$ 離れて置かれている時，その間に作用する万有引力 $F[kg{\cdot}m/s^2]$ は

$$F = G\frac{M_1M_2}{R^2} \tag{2}$$

の関係を持つ. ここで $G[m^3/(kg{\cdot}s^2)]$ は重力定数である. この式も明らかに客観的かつ普遍的であり,

Compositional Law Discovery Based on Scale Cognition of Feature Quantities by Takashi Washio and Hiroshi Motoda (I.S.I.R., Osaka University).

熱伝達特性式と同じく実験や天体の観測によって得られた実験式である．しかしながらこの式は通常，万有引力の“法則”と呼ばれる．このような“単なる実験式”と“法則式”との差異は，一般には前者が表面的な関係を表すに過ぎないのに対し，後者は対象に働く基礎的または素な機構を陽に表すことから来るものと理解されている．しかしながら，万有引力の法則式が分解不能な素な関係であるという物理的保証は得られていない (Feynman, 1965)．単なる実験式と法則式との区別の基準は，もっと明確に考察されなければならない．

法則や法則式と呼ばれる事物間の関係は，それら事物を対象とする学問体系の中では，解明の道具と位置づけられる．事物間の関係が対象の解明に用いられるためには，単にそれが客観的かつ普遍的に認められるものであれば良いというわけではない．それらの表象形式は，我々がそれらを見い出した過程が有する前提や操作と整合していなければならないし，また我々の対象解明の過程に適用可能でなければならない．この際，どのような表象の変換に関して法則や法則式の性質が保存されるのか，その表象クラスを同定できれば，法則や法則式の基準が明確化されると考えられる．また，このような基準が得られれば，単なる実験式ではない法則式候補を実験や観測データから自動的に構成する方法を体系化できる可能性がある．本論文では，特に属性量間の数学的関係に的を絞り，法則式の認知的成り立ちを議論し，法則式としての表象の基準を提案する．また，それに基づいて法則式候補を構成的に発見する方法の体系化を示す．更にそれを具体的例題に適用し，本論文で考察した法則式候補の構成的発見過程の妥当性を評価する．

2. 経験的関係式が法則式であるための条件

法則式の条件に関する体系的かつ詳細な研究は少ない．法則式は各学問体系発展の歴史的経緯の中で発見・銘々されてきており，その学問体系上の慣習によって広く知られたあくまでも経験的な関係であるという解釈が取られることも多い．しかしながら，学問体系の最も基本的な道具である法則式の定義や成立条件を公理論的な立場から明確化しようという努力も，断片的ながら多くの著名な科学者達によって行われてきた．もちろん，慣習的側面を有する“法則式”という用語を，例外なく公理化することには無理があろう．しかしながら，対象解明の基本的道具である法則式が具備すべき条件を明確化することは，学問体系の基礎をより堅牢なものにするためにも意義深いと考えられる．R. Descartes は演繹法に関する考察の中で推論の明証性や問題分割，健全性や無矛盾性の規範を提唱しており (Descartes, 1637)，これらは学問体系の構成要素として法則式を見いだす際にも重要である．I. Newton は自然法則を発見する際の規範として，自然界の原因以外を排除する客観性，なるべく少数の原因のみを仮定する簡潔性，広範囲での成立を要請する普遍性，すべての試行結果に反しない健全性を要求した (Newton, 1686)．同様に H.A. Simon も法則記述の簡潔性を主張している (Simon, 1977)．R.P. Feynman は特に法則形式の時間や空間に関する数学的制約性の重要性を述べている (Feynman, 1965)．筆者等はこのような考察を踏まえ，以下に述べるように法則式に要請される条件の体系化を試みた．

対象とする事物の解明の道具である法則式 ℓ_j は，その対象解明を担う学問体系 T に含まれる．ここで学問体系 T を以下のように定義する．

定義 1 (学問体系) 次のような４項組 T を “学問体系” という．

$$T = < S, A, L, D >$$

ただし，

$S = \{s_h | s_h \text{は構文法}, h = 1, ..., p\}$,
$A = \{a_i | a_i \text{は公理}, i = 1, ..., q\}$,
$L = \{\ell_j | \ell_j \text{は公準}, j = 1, ..., r\}$,
$D = \{o_k | o_k \text{は対象現象}, k = 1, ..., s\}$.

S は T の構文論であり，例えば物理学ならば座標系や速度，エネルギーといった属性量の定義，演算規則及びそれらの記法などが，各々s_h に相当する．また，A の各公理 a_i は，物理学ではデカルト座標における複数点間の距離の大小関係など，対象の性質に因らない数学的な規則である．更に，L の各公準 ℓ_j は，学問体系において経験に基づいてその成立が前提とされる法則であり，例えば前節の万有引力の法則式などが相当する．A と L は学問体系 T の意味論を与える．一方，１つの学問体系は世界の特定の対象領域 D に解明の的を絞ることを前提に構築されている．つまり S, A, L のいずれもが D での記述しか保証しない．従って，法則式 ℓ_j に要求される諸条件は，それを含む学問体系 T が対象

とする領域 D において成立すれば必要十分である．また，古典力学においてすべての対象現象の解明に万有引力の法則が必ずしも必要なわけではないように，ℓ_j は D の一部の対象現象の解明にしか用いられない．

定義 2 (式の対象領域) ある数学的関係式 e に含まれるすべての属性量が，互いに関連ある属性量として対象現象の記述に現れるとき，その現象は "式 e の対象現象" であるという．また，対象領域 D 内のそのようなすべての対象現象の集合を "式 e の対象領域" $D_e(\subseteq D)$ という．

例えば，円管内強制乱流の熱伝達という現象が Nu, Re, Pr で記述される限り，前述の Dittus-Boelter の式の対象現象である．また，２つの質点 M_1, M_2 とその距離 R，質点間に及ぶ力 F からなる系は，常に万有引力の法則式の対象現象である．

定義 3 (式の成立と無矛盾) ある数学的関係式 e の対象現象において，式 e が成り立つ場合を e が "成立" するという．また，対象現象が式 e に反する関係を示さなければ式 e は "無矛盾" であるという．

上記２質点の衝突における運動量保存問題を考えるとき，古典力学では質点が十分重ければ万有引力の法則が "成立" するとして現象解明を行うが，軽ければその効果は無視される．しかし，この際２質点の衝突現象は万有引力の法則には "無矛盾" である．

上記を念頭に置きながら一般の学問体系に関して，対象現象の測定を通じて得られる属性量間のある数学的関係式 e が法則式 ℓ_j と認められるための諸条件を以下のように整理する．

(1) 客観性：D_e に属する対象現象において，式 e が含むすべての属性量を測定可能である．

(2) 普遍性：D_e に含まれる広範囲の対象現象に関する試行において式 e の成立が同定される．

(3) 再現性：D_e に含まれる対象現象に関し同一条件の繰り返し試行を行っても，式 e の成立や無矛盾に関し常に同じ結果を同定する．

(4) 健全性：D_e に含まれる対象現象に生起可能な全挙動に関し，式 e の無矛盾を同定する．

(5) 簡潔性：D_e に含まれる対象現象に関して，式 e は極力少数の属性量間の関係を表す．

ここで "試行" とは実験や観測のことであり，"同定" とは試行の誤差を考慮して確認することである．客観性や普遍性は広義には (2), (3),(4) を含む概念として用いられることも多いが，ここでは各条件の多義性を排除し明確化するため狭義に捉える．

前節の式 (1) の例題を考えると，前述の通り円管内強制乱流の熱伝達現象は Dittus-Boelter の式の対象現象である．この式が属する熱水力学という学問体系は，Nu や Re, Pr の全値域に関する現象を対象とする．すなわち，対象領域 D には Nu や Re, Pr の全値域の現象が含まれる．また，定義 2 は D 内で当該式が対象とするすべての現象を D_e と定めるため，同じく D_e には Nu や Re, Pr の全値域に関する当該式の対象現象が含まれる．この式は測定可能な属性量のみに関する客観的関係式であり，その形式も簡潔である．また，多くの円管内強制乱流に関して成立し，かつ何度同一条件の実験を繰り返しても再現性を示す．従って，科学的な実験式である．しかし，この式は $10^4 \leq Re \leq 10^5$ かつ $1 \leq Pr \leq 10$ の範囲でしか成立しないことが知られており，この範囲外の D_e 内の対象現象に矛盾する．従って，熱水力学という学問体系の中で対象現象と矛盾する挙動を示すことがあり，健全性を満たさない．このような理由により，本式を法則式と見なすことはできない．一方，式 (2) について考えると，古典力学は質量や距離，力の全値域に関する現象を対象とし，D にはこれらの全値域の現象が含まれる．従って，当該式の対象領域 D_e もこれらの全値域の現象を含む．この式もやはり客観性，簡潔性を有し，かつ古典力学が対象とする領域において普遍性及び再現性が成立する．更にその領域のすべての対象についてこれに反する挙動は見つかっていない．従って，健全性の条件も満たす．

しかしながら関係式が法則式であるためには，更に以下の条件が要請される。

(6) 数学的許容性：関係式が構文論 S 及び意味論の公理系 A に従うこと．

これにはもちろん属性量間の関係が四則演算や関数その他の数学的関係を持たねばならないという条件が含まれるが、それ以外にも単位次元の整合性 (Bridgman, 1922; Buckingham, 1914) や後述する尺度制約など，種々の許容制約が含まれる。例えば単位次元の整合性については，式 (1) では Nu, Re, Pr の属性量のいずれもが，それぞれの定義式中で単位が互いに打ち消し合い無次元量となっている．従って，式 (1) の右辺，左辺もそれぞれ無次元であり整合性が取れている．式 (2) においても左右の単位次元は $[kg{\cdot}m/s^2]$ であり，整合性が取れている．この

ように単位次元の整合性を吟味しながら，妥当な法則式の形式を検討する手法を “単位次元解析” という．

3．属性量尺度の認知的決定

前章の (1) − (4) の条件は，実際の実験や観測を通じて成否が判定される．実験や観測の過程が明確に定義されていれば，得られるデータに対する式の当てはめや誤差評価など，従来，統計理論の分野で十分に体系化された方法を用いることができる．(5) 簡潔性及び (6) 数学的許容性は関係式の形式に関する条件であり，対象に直接には依存しない．従って，これらは個別の実験や観測の問題とは切り離し，別に条件基準を設定することが可能なはずである．(5) 簡潔性については，従来，統計理論の分野で “AIC 基準”(Akaike, 1974)，情報理論の分野で “MDL 基準”(Rissanen, 1978) など，関係式の精度と自由度のトレードオフにおいて簡潔性の適切さを評価する条件と方法論が既に体系化されている．(6) 数学的許容性に関しては，単位が明確な属性量の関係式については前述の単位次元解析の方法論が適用可能である．しかしながら，認知科学や社会学，経済学，生物学など，物理学以外の学問体系の対象領域では，属性量の測定過程の構造が明確ではなく，各属性量の単位が不明である場合も多い．このようにより広範な領域の関係に関しては，十分に体系化された条件は得られていない．

一方，殆どの学問体系においては，属性量の値は何らかの測定によって得られる．従って，たとえ属性量の定義がその測定過程とは無関係に与えられたとしても，必ず測定過程の内容によって特徴づけられるはずである．単位次元はそのような特徴の１つであるが，より一般的な特徴は “尺度” である．本章では属性量の尺度と制約の認知的決定の観点から，(6) 数学的許容性に関して新たにより一般的な条件の体系化を提示する．

S.S. Stevens は測定過程を “一定の規則によって対象や事象に数を割り当てること” と定義した．そして，異なる規則の下で数が割り当てられれば異なる種類の “尺度（*scale type*）” と “測定” が導かれると主張し，名義尺度，順序尺度，間隔尺度，比例尺度などの分類と特徴づけを行った (Stevens, 1946)．また引き続き，D.H. Krantz 等は人間の認知的行為としての測定過程の数学的公理化とそれに基づく尺度の公理化を行った (Krantz, Luce, Suppes, & Tversky, 1971)．これら一連の公理化によって得られる尺度の性質が，次節以降で提案する法則式の数学的許容性を導く上での基礎を与える．そこで，本節では，特に定量的尺度である間隔尺度，比例尺度などについて，D.H. Krantz 等の公理化を概観する．

D.H. Krantz 等によれば，測定には “基本的測定” と “誘導的測定” の２種類がある．前者は我々が目的とする属性量を原理的に直接測定する手段がある場合であり，これにより得られる属性量を “外延量” という．外延量の例は，距離や重さ，時間，体積などである．これらはすべて定規目盛りや天秤釣り合い，振り子の振れ回数，詰め込める立方体の数などによって直接測定できる．これに対し，後者は目的とする属性量を原理的に他の属性量から間接的に導出するしかない場合であり，これにより得られる属性量を “内包量” という．内包量の例は，温度，密度，加速度，一対比較で得る重みなどである．これらは水銀の体積膨張量への置き換え，重さと体積の商，距離と時間の２重の商，一対比較値の幾何平均など，他から間接測定するしかない．これら２種類の測定は全くその過程が異なるため，公理化やそれに基づく尺度の定義も各々異なる．

3.1　基本的測定と尺度

最初に基本的測定の定式化を述べる．

定義 4 (関係システム)　次のような有限個の系列 α を “関係システム” という．

$$\alpha =< A, R_1, R_2, ..., R_n >$$

ただし，

A:定義域であり空でない集合，

R_i:$a_1, a_2, ..., a_{m_i} \in A$ の関係 $R_i(a_1, a_2, ..., a_{mi})$.

定義 5 (タイプと相似性)　関係システム α について，各 R_i が A の m_i 個の要素についての関係である時，正整数の系列 $< m_1, m_2, ..., m_n >$ を α の “タイプ” という。２つの関係システム α 及び $\beta =< B, S_1, S_2, ..., S_n >$ についてタイプが等しい時，両者は “相似” であるという．

定義 6 (同型性（準同型性）)　２つの関係システム α, β について以下の条件が満たされれば両者は “同型（準同型）” である．

(1)　α, β は相似である．

(2)　A から B への全単射（全射）f が存在し

$R_i(a_1, a_2, ..., a_{m_i}) \Leftrightarrow$
$S_i(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_{m_i}))$.

定義 7 (数的及び経験的関係システム)　関係システム α が以下の条件を満たす時，α を“数的関係システム”という．

(1)　定義域 A が実数の部分集合．

(2)　$R_i(i = 1, 2, ..., n)$ が実数の間の関係．

数的関係システムと見なさないものを“経験的関係システム”という．

以上より，基本的測定とその尺度が定義される．

定義 8 (基本的測定)　測定対象に認められる経験的な操作や関係の形式的な構造（経験的関係システム）を記述し，それらが適当に選ばれた数・記号間の操作や関係の形式的な構造（数的関係システム）と同型ないしは準同型であることを示すことを“基本的測定”という．

定義 9 (基本的測定における尺度)　$< \alpha, \beta_f, f >$ を“尺度”という．ここで，

α：経験的関係システム，

β_f：満ちた数的関係システム，

f：α から β_f の部分システムへの準同型写像．

“満ちた数的関係システム”とはその定義域が実数全体であるもの，また“部分システム”とはその定義域が元のシステムの定義域の部分集合で，かつ部分システムで成立するすべての関係が元のシステムでの関係に一対一に対応がつくものである．経験的関係システム $\alpha =< A, I >$ が以下に述べる“分類システム”の時，名義尺度による測定が可能であることが知られている．

定義 10 (分類システム)　$\alpha =< A, I >$ において，関係 I が A の任意の２つの要素に関するものであるとき，α を“2元システム”という．更に I が全て次の３つの性質を持つ時，I は等値関係，α は“分類システム”という．また，互いに I が成立する要素の集合を“I-等値類”という．

反射律：$\forall a \in A, I(a, a)$

対称律：$\forall a, \forall b \in A, I(a, b) \Rightarrow I(b, a)$

推移律：$\forall a, \forall b, \forall c \in A, I(a, b) \wedge I(b, c) \Rightarrow I(a, c)$

以上の定式化を具体例で説明する．図 1に示すような経験的関係システム α を考える．この定義域 A は6つの錘からなる集合 $\{a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3\}$ のべき集合であり，A 上の関係として上皿天秤が釣り合う現象を上記の等値関係と見なすことができる．すなわち，物理的には困難ではあるが，全く同一の

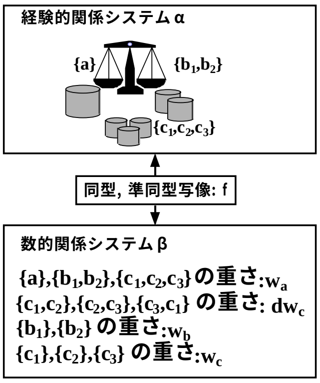

図 1　基本的測定の例
Fig. 1　Example of fundamental measurement.

錘集合自身を左右の上皿に乗せれば天秤は釣り合うはずであり反射律が成立する．また，以下の集合のペアについてそれぞれを天秤の左右の上皿に載せて釣り合う場合には，お互いの皿の位置を交換しても同様に釣り合うため対称律が成立する．

$$(\{b_1\}, \{b_2\}), (\{c_1\}, \{c_2\}), (\{c_2\}, \{c_3\}),$$
$$(\{c_3\}, \{c_1\}), (\{c_1, c_2\}, \{c_2, c_3\}),$$
$$(\{c_2, c_3\}, \{c_3, c_1\}), (\{c_3, c_1\}, \{c_1, c_2\}),$$
$$(\{a\}, \{b_1, b_2\}), (\{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2, c_3\}),$$
$$(\{c_1, c_2, c_3\}, \{a\})$$

また，$\{a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3\}$ のべき集合の内，以下の集合の組について，２つの集合ペアが釣り合えば残りの集合ペアも釣り合う推移律が成立する．

$$(\{c_1\}, \{c_2\}, \{c_3\}),$$
$$(\{c_1, c_2\}, \{c_2, c_3\}, \{c_3, c_1\}),$$
$$(\{a\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2, c_3\})$$

従って，この経験的関係システム α は分類システムである．これに対して，数的関係システム β の定義域 B を実数の集合とし，α で I-等値類である集合を B 上の同一の実数に割り当てる適当な全射 f を以下のように取る．

$$w_a = f(\{a\}) = f(\{b_1, b_2\}) = f(\{c_1, c_2, c_3\}),$$
$$w_b = f(\{b_1\}) = f(\{b_2\}),$$
$$w_c = f(\{c_1\}) = f(\{c_2\}) = f(\{c_3\}),$$
$$dw_c = f(\{c_1, c_2\}) = f(\{c_1, c_3\}) = f(\{c_2, c_3\})$$

ただし,$w_a, w_b, w_c, dw_c \in B$.

このとき，β における関係を実数の等号関係とすると，同一の実数同士に等号関係が成り立つのは自明なので A の要素集合の各写像 f に反射律が成立し，また上記の w_a, w_b, w_c, dw_c にそれぞれ等しい各写

像の間には，それぞれ対称律，推移律が成立する．すなわち，実数の等号関係は等値関係 I と見なすことができ，β は分類システムとなる．従って，我々は天秤の釣り合いを等値関係と見なし，かつ準同型写像 f を用いて，等しい重さの錘に同一の実数ラベルを付ける測定を行い名義尺度を得たことになる

経験的関係システム $\alpha =< A, I >$ が以下に述べる "系列" の時，順序尺度による測定が可能であることが知られている．

定義 11 (系列) $\alpha =< A, P >$ を任意の２元システムとする．P が次の３つの性質を持つ時，P を大小関係，α を "系列" という．

非対称律：$\forall a, \forall b \in A, P(a,b) \Rightarrow \neg P(b,a)$

推移律：$\forall a, \forall b, \forall c \in A, P(a,b) \wedge P(b,c) \Rightarrow P(a,c)$

排中律：$\forall a, \forall b \in A, P(a,b), P(b,a)$
の一方のみが必ず成立．

関係システムの定義域 A に等値関係を満たす要素が含まれる場合，すなわち $\alpha =< A, I, P >$ では，I-等値類毎にグループ化して各々１つの要素で代表させて表し，"商集合"A/I に置き換えれば，α を $\alpha/I =< A/I, P >$ として系列化できる．この時，α/I は順序尺度による測定が可能である．

上記図１の例で，経験的関係システム α の定義域 A を I-等値類毎にまとめた α/I について，A/I の要素の関係 $P(r,s)$ を，上皿天秤の両皿それぞれに錘の集合 r と s を置いた時，s が載った皿の側に傾くこととすれば，$P(r,s)$ は上記の系列における定義を満たす．また，数的関係システム β の定義域 B の要素の関係 $P(w_r, w_s)$ を不等号 $w_r < w_s$ とした時，全射 f を先の名義尺度における対応条件に加えて，α で s が載った皿の側に傾く場合に $w_r < w_s$ の関係を満たす実数値を各 w_a, w_b, w_c, dw_c に割り当てるものと定めれば，β も準同型な系列となる．この時，全射 f による錘の集合に対する実数の割り当て $w_c < w_b < dw_c < w_a$ は順序尺度となる．

更に，経験的関係システム $\alpha =< A, I >$ が以下に述べる "差システム" の時，間隔尺度による測定が可能であることが知られている．

定義 12 (差システム) $\alpha =< A, D >$ において，関係 D が A の任意の４つの要素に関するものであるとき，α を "４元システム" という．この時 A の要素 $\{a,b,c,d,e,f\}$ に以下の公理が成立すれば，α を "差システム" という．

$P(a,b) \not\Leftrightarrow D(a,b,a,a)$,
$I(a,b) \Leftrightarrow D(a,b,b,a) \wedge D(b,a,a,b)$,
$D(a,b,c,d) \wedge D(c,d,e,f) \Rightarrow D(a,b,e,f)$,
$D(a,b,c,d), D(c,d,a,b)$ のうち一方が必ず成立，
$D(a,b,c,d) \Rightarrow D(a,c,b,d)$,
$D(a,b,c,d) \Rightarrow D(d,c,b,a)$,
$\exists c \in A, D(a,c,c,b) \wedge D(c,b,a,c)$,
$P(a,b) \wedge \neg D(a,b,c,d) \Rightarrow$
$\quad \exists e \in A, P(a,e) \wedge P(e,b) \wedge D(c,d,a,e)$,
$\exists e, \exists f \in A, \exists$ 整数 n,
$\quad P(a,b) \wedge D(a,b,c,d) \Rightarrow M_n(c,e,f,d)$.

ここで M_n は D から再帰的定義される c と d の間の $n+1$ 等分関係である．関係システムの定義域 A に等値関係を満たす要素が含まれる場合には，定義域 A を "商集合"A/I に置き換え $\alpha/I =< A/I, D >$ を考えば差システムとなる．この時，α/I は間隔尺度による測定が可能である．

図 1の例で，α/I について A/I の要素の関係 $D(r,s,t,u)$ を，上皿天秤の左皿に錘の集合 r と u 及び右皿に s と t を置いたとき左に傾く関係であるとすると，α/I は差システムとなる．また，数的関係システム β の定義域 B の要素の関係 $D(w_r, w_s, w_t, w_u)$ を $(w_s - w_r) \leq (w_u - w_t)$ とした時，全射 f を先の名義尺度，順序尺度の対応条件に加えて，α/I で関係 $D(r,s,t,u)$ が成立する場合に β で $D(w_r, w_s, w_t, w_u)$ の関係を満たす実数値を各 w_a, w_b, w_c, dw_c に割り当てるものと定めれば，β も準同型な差システムとなる．このとき，$w_a = w_c + 4(w_b - w_c), dw_c = w_c + 2(w_b - w_c)$ の関係が得られ，全射 f による実数の割り当ては間隔尺度となる．このような f は唯一ではなく，α/I に準同型な２つの数的関係システム β_1, β_2 を構成する f_1, f_2 は線形変換 $f_2 = k \cdot f_1 + c$ の関係にある．間隔尺度は事物の等値と大小関係，差に意味を持つが，絶対的基準原点を持たない．例としては摂氏，華氏などの温度，ポテンシャルエネルギー，座標上の位置などがある．

また，同じく２つの差システム α/I と β に関して，$A/I \times A/I$ から $B \times B$ への写像 $f(r,s) = w_s - w_r$ かつ $f(\phi, r) = w_r$ を取るとき，α/I は比例尺度により測定される．この場合，図１の例では，β の $f(\phi, c_1) = w_c$ 及び $f(c_1, \{c_2, c_3\}) = dw_c - w_c$ に関して同型な α/I における比較操作では両者が釣り合うので，$dw_c = 2w_c$ であることが判る．これと先の w_a, w_b との関係式より，$2w_b = 3w_c, w_a = 3w_c$

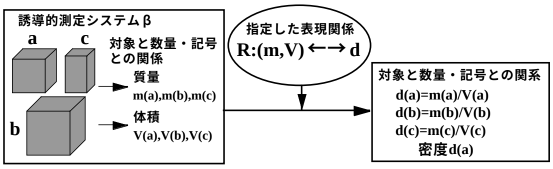

図 2　誘導的測定の例
Fig. 2　Example of derived measurement.

が導かれ，比例尺度が構成される．このような f は唯一ではなく，α/I に準同型な２つの数的関係システム β_1, β_2 を構成する f_1, f_2 は相似変換 $f_2 = k \cdot f_1$ の関係にある．比例尺度は事物の等値と大小関係，差，比に意味を持つ．例としては絶対温度，距離，質量などがある．

3.2　誘導的測定と尺度

次に誘導的測定の定式化を述べる．

定義 13 (誘導的測定システム)
$\beta =< B, f_1, f_2, ..., f_n >$ を "誘導的測定システム" という．ここで，
B:測定の対象たる事物の集合（空でない），
f_i:B または積集合 B^m 上の実数値関数．

定義 14 (誘導的尺度)　３項組 $< \beta, R, g >$ を "誘導的尺度" という．ここで，
β : 誘導的測定システム，
g:B または積集合 B^m 上の実数値関数
$R((f_1, f_2, ..., f_n), g)$:$f_1, f_2, ..., f_n$ と g の対応関係．

定義 15 (誘導的測定)　誘導的測定システム β が与えられたとき，指定した関係 $R((f_1, f_2, ..., f_n), g)$ が成立するような B(または B^m) 上の実数値関数 g を定めることを "誘導的測定" という．

以上の定式化を具体例で説明する．図 2に示すような誘導的測定システム β を考える．この場合，$B = \{a, b, c\}$ かつ $f_1 = m, f_2 = V$ である．ここで $g = d$ として $R((m, V), d) \equiv d = m/V$ とすると，d は $V = 0$ 以外の条件では必ず定まる．従って，$m \geq 0, V > 0$ において誘導的測定が可能であり，いわゆる密度 d が導かれる．

特に誘導的測定によって導かれる尺度に絶対尺度がある．誘導的測定システム $\beta =< B, f_1, f_2, ..., f_n >$ が与えられ，各 f_i は比例尺度とする．この時，$R((f_1, f_2, ..., f_n), g) \equiv g = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\gamma_i}$ を満たす関数 g が存在し，かつ各単位系の変換 $f_i' = k_i \cdot f_i (i = 1, 2, ..., n)$ について常に $\prod_{i=1}^{n} k_i^{\gamma_i} = 1$ であるとする．このとき，$< \beta, R, g >$ は絶対尺度と呼ばれる．このような絶対尺度は一意に決定するので，許容変換は恒等変換 $g' = g$ である．絶対尺度は事物の等値と大小関係，差，比，絶対値に意味を持つ．例としては，２つの物体の質量比，ラジアン角，式 (1) の各無次元量などがある．

表 1　各尺度の特徴
Table 1　Characters of scale types.

尺度	基礎的経験操作	数学的群構造一意性
間隔	間隔や差の等値性の決定	一般的線形群 $x' = kx + c$
比例	比の等値性の決定	相似群 $x' = kx$
絶対	値の等値性の決定	恒等群 $x' = x$

以上の公理化により明らかになった尺度の特徴を表 1 にまとめる．誘導的測定で定義される属性量 g は，他の属性量 f_i から派生的に導かれるため，その尺度の性質を基礎的測定の場合のように自身が満たす公理によって特徴づけることは困難である．しかしながら，その属性量が表 1に示される基本的測定における各尺度の数学的群構造のいずれかと同じ形式の変換に従う場合，その属性量の形式的な尺度タイプを類別することは可能である．

以上のような公理論的規則により，尺度を構成したり与えられた属性量の尺度を類別できる．そして，その類別に基づいて，次節以降で提示する法則式の数学的許容性の規範を利用し，法則式の形式の候補を大幅に絞り込むことができる．

4.　尺度に関する数学的許容性

4.1　属性量の関係制約

ここでは過去の研究で明らかにされ各尺度属性量間の制約に関する定理を概観する．そして次に，我々によるそれらの拡張を提示する．

R.D. Luce は表 1に示す各尺度の単位変換に関する群構造制約が複数の属性量間に数学的に許容される関係を著しく限定することを指摘した (Luce, 1959)．たとえば，x と y を比例尺度とすると，両者の制約はそれぞれ $x' = kx, y' = Ky$ である，もし，両者の関係を $y = \log x$ と仮定すると，x の単位変換によって y も単位変換を受けるため，

表 2　2属性量間の数学的許容関係式
Table 2　Admissible relations between two quantities.

No.	尺度の種類 独立量	従属量	許容関係
1	比例	比例	$u(x) = \alpha x^{\beta}$
2.1	比例	間隔	$u(x) = \alpha x^{\beta} + \delta$
2.2			$u(x) = \alpha \log x + \beta$
3	間隔	比例	不可能
4	間隔	間隔	$u(x) = \alpha x + \beta$

$y' = \log x' = \log kx = \log x + \log k$ となり，y の原点移動が起きてしまう．これは y の制約 $y' = Ky$ と矛盾してしまう．従って，比例尺度の属性量同士の直接の関係として対数関係はあり得ない．R.D. Luce はこの議論をより一般的に押し進め，表 2に示す各種尺度の2属性量間の一般的許容関係を導いた．

一方，前述の単位次元解析において，以下の重要な定理が知られている (Bridgman, 1922)．

定理 1 (Product Theorem)　比例尺度の属性量 $x, y, ...$ をその誘導量 f に関係づける関係式は以下の形式を有する．

$$f = Cx^a y^b z^c ...$$

ここで $C, a, b, c, ...$ は定数である．

R.D. Luce の結論は主に2つの属性量間の関係に関するものであった．また，次元解析の上記定理は複数の属性量間の関係に関するものではあるが，比例尺度量同士に関係に限定されている．そこで，我々は間隔，比例，絶対の3種の尺度が混在する多属性量間の数学的許容制約を表す以下の定理を導いた．

定理 2 (Extended Product Theorem)　比例尺度の属性量の集合 R と間隔尺度の属性量の集合 I について，各 $x_i \in R \cup I$ を誘導量 Π に関係づける関数 ρ は，以下の2式の何れかの形式を取る．

$$\Pi = (\prod_{x_i \in R} |x_i|^{a_i})(\prod_{I_k \in C} (\sum_{x_j \in I_k} b_{kj}|x_j| + c_k)^{a_k})$$

$$\Pi = \sum_{x_i \in R} a_i \log|x_i| + \sum_{I_k \in C_{\bar{g}}} a_k \log(\sum_{x_j \in I_k} b_{kj}|x_j| + c_k) + \sum_{x_\ell \in I_g} b_{g\ell}|x_\ell| + c_g$$

ただし，R も I も空集合であることが可能である．また，C は I の1つの被覆であり，$C_{\bar{g}}$ は $I - I_g$ $(I_g \subseteq I)$ の1つの被覆である．Π は間隔，比例，絶対何れの尺度であってもよい．また，各係数は定数である．

法則式に現れる各属性量が比例尺度量または間隔尺度量である限り，直接的な単位変換関係を有する属性量同士の関係は必ず上記に従う．

4.2　法則式の構造

本節では各属性量の尺度が法則式及びそれらで構成される対象モデル式の全体の構造をどのように規定するかについて考察する．単位次元解析において，いま1つ重要な以下の定理がある (Buckingham, 1914)．

定理 3 (Buckingham Π-theorem)
もし $\phi(x, y, ...) = 0$ が1つの完全な式であり，各属性量 $x, y, ...$ が比例尺度であれば，それを以下のような形式に書き換え可能である．

$$F(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-r}) = 0$$

ここで n は ϕ の引き数の数であり，r は $x, y, ...$ の基本単位の数である．またすべての i について，Π_i は絶対尺度量である．

ここで基本単位とは，長さ $[L]$，質量 $[M]$，時間 $[T]$ のように ϕ において他の次元とは独立に属性量のスケールを決める単位次元のことである．単位次元解析では絶対尺度量 Π_i を定義する式 $\rho_i(\Pi_i, x, y, ...) = 0$ を "*regime* 式" と呼び，式 $F(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-r}) = 0$ を "*ensemble* 式" と呼ぶ．式 $F = 0$ の引数はすべて絶対尺度量であるため，*ensemble* 式の形式は定理 2には従わず任意のものが許される．

この定理は **Product Theorem** と同じく，比例尺度に限った属性量に関するものである．そこで，前章の場合と同じく実際の法則式やそれにより構成されるモデル式に当てはめるために，比例尺度及び間隔尺度，絶対尺度が混在する複数属性量からなる式に関して定理の拡張を行った．

定理 4 (Extended Buckingham Π-theorem)
$\phi(x, y, z, ...) = 0$ が1つの完全な方程式である場合，かつその中の各属性量が間隔，比例，絶対尺度の何れかである場合には，$\phi = 0$ は以下の形式に書き換え可能である。

$$F(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-r-s}) = 0$$

ここで，n は ϕ の引数の数，r と s はそれぞれ $x, y, z, ...$ の属性量が有する基礎単位及び基礎原点の

数である．また全ての i について，Π_i は絶対尺度量であり，各々*Extended Product Theorem* の *regime* 式により求められる．

ここで基礎原点とは，摂氏温度において１気圧下の氷点を原点にして測定がなされるように，間隔尺度の測定において基準点として人為的に選ばれる原点のことである．この定理においても，式 $F=0$ の引数はすべて絶対尺度量であるため，*ensemble* 式の形式は任意のものが許される．

以下の式は定理 2及び定理 4の実例である．これは放射性核種崩壊に関する法則式である．

$$N = N_0 \exp[-\lambda(t-t_0)] \tag{3}$$

ただし,$t[s]$: 時刻, $t_0[s]$: 基準時刻,
$\lambda[s^{-1}]$: 崩壊速度定数, $N[kg]$: 核種質量,
$N_0[kg]$: t_0における核種質量

ここで，t 及び t_0 は間隔尺度，*lambda* と N, N_0 は比例尺度である．この式は無次元量 Pi_1, Pi_2 の導入によって，

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \exp(-\Pi_2) & (4)\\ \Pi_1 &= N/N_0 & (5)\\ \Pi_2 &= \lambda(t-t_0) & (6) \end{aligned}$$

のように，１つの *ensemble* 式と２つの *regime* 式に書き換えることができ，*regime* 式 (5) 及び (6) は定理 2のはじめの式に従う．ここで，属性量数は全部で５個なので $n=5$，t, t_0, λ は１つの基礎単位 $[s]$，N, N_0 は他の基礎単位 $[kg]$ を有し合計 $r=2$，また，t, t_0 は時刻を計る基礎原点を共有するので $s=1$ である．従って，定理 4によれば *regime* の総数は $n-r-s=2$ となり，これは上記の書き換え結果と一致する．

以上のように，属性量の尺度と制約に関する認知的決定は，法則式の数学的許容性の条件に関して極めて強い制約を与えており，我々の理解にとって受け入れ可能な法則式の形式の多くの部分を決めてしまうことが分かる。また，換言すればこれらの定理を満たす範疇でしか，法則式としての性質を保存する表象の変換は許されない．測定された属性量を任意の関数で変数変換して得るような関係式は，法則式とは呼べない．

5．尺度とデータからの構成的法則発見方法

本章では以上で論じた数学的許容性に加えて，“法則式” であるための客観性，普遍性，再現性，健全性，簡潔性といった条件を，対象に関する試行実験を通じて確認しながら，属性量間に成立する法則式を構成的に発見するアルゴリズムを提示する。これらの条件のうち，特に普遍性と健全性に関しては，対象系やそれに類似する種々の系に関する広範な経験的知識を用いなければ，十分にその条件成立を判定することは困難である．しかしながら，与えられた対象系に限定してこれらの条件成立の判定を行うように条件を緩和するならば，それらの確認は比較的容易である。このような前提の下で，各条件の成立を保証する関係式を導出するための実験内容を以下にまとめる。

(１) 客観性：対象現象にて測定される属性量間のみの関係式を探す．

(２) 普遍性：対象現象にて各属性量が取ることの可能な全ての挙動に成立する関係式を探す．

(３) 再現性：対象現象にて繰り返し同一実験を行って現れる各属性量間の挙動に少なくとも無矛盾な関係式を探す．

(４) 健全性：対象現象にて各属性量が取ることの可能な全ての挙動に無矛盾な関係式を探す．

(５) 簡潔性：対象現象にて測定される属性量の中で，極力少数の間の関係式を探す．

(６) 数学的許容性：定理 2及び 4が示す形式の関係式の中で，対象現象にて成立するものを探す．

客観性に関しては，対象現象で測定可能なデータに限って関係式を探索すれば自ずと満たされる．また上記条件の緩和により，健全性に関する条件は普遍性の条件に繰り入れ可能となる．しかしながら，関係式の成立の是非を対象現象の可能な全ての挙動について調べる方法が必要となる．この方策として，制御可能な属性量を全ての値域内で統制して，対象現象で可能なあらゆる属性量値の組み合わせやその時系列を導くことは，計算上の組み合わせ爆発を起こしてしまい現実的でない．そのために，以下の仮定を置く．

(a) 対象現象は１つの完全な方程式で表される．この際，各属性量は１つを除いてまたは全て制御可能である．

(b) 対象現象は静的な系であるか，動的な場合でも微分量を測定可能である．

(c) 対象現象の各属性量の任意のペアについて，他の属性量を特定の値の組に固定し２者の関係を同定可能である．

このような条件を満たす対象現象については，その全ての属性量から任意のペアを選び，それら以外の属性量を特定の値に統制し，ペア属性量についてのみ全ての値域で互いに値を変化させ，その間に成立する１つの関係式を探せばよい．この際，法則式として妥当な関係式を少ない計算量で探索するために数学的許容性の条件を用いる．すなわち，はじめに定理 2より間隔尺度同士のペア $\{x_i, x_j\}$ について

$$b_{ij}x_i + x_j = d_{ij}$$

の関係を探す．また，比例尺度同士のペア $\{x_i, x_j\}$ については

$${x_i}^{a_{ij}} x_j = d_{ij}$$

の関係を，更に間隔尺度 x_i と比例尺度 x_j のペア $\{x_i, x_j\}$ については

$$b_{ij}x_i + \log x_j = d_{ij}$$

を探す．これを可能な属性量ペアすべてについて行うことで，探索の早い段階で，定理 2を満たす２属性量間の関係式の形式を同定する．２属性量間に限られた関係式を求める実験試行を "*bi-variate test*" と呼び，これにより属性量の個数 n に対して $O(n^2)$ のオーダーの複雑さで実験を組むことができる．また，再現性の確認及びノイズや誤差の影響の軽減のために，同一条件の実験を一定回数 m 回繰り返すことにすれば，実験の複雑さは $O(mn^2)$ となる．

"*bi-variate test*" の結果は２つの属性量間のばらばらな関係に過ぎないため，これらの関係式を組み合わせ定理 2に示される形式の各 *regime* 式を得る必要がある．この際，簡潔性を確保するためボトムアップに関係式の組み上げを行い，極力少ない属性量ですべての実験データについて成立する関係を得る．ただし，結果の普遍性と健全性を確保するために，複数の式を組み上げるに当たって，互いに整合な式同士のみをまとめる必要がある．そこで "*bi-variate test*" の結果である２属性量間の関係式の集合において，３つの式からなる各組について３式が互いに無矛盾であるか否かをテストする．例えば間隔尺度同士の線形関係式の３つ組

$b_{ij}x_i + x_j = d_{ij}, b_{jk}x_j + x_k = d_{jk}, b_{ki}x_k + x_i = d_{ki}$

に関しては，定理 2より互いに矛盾がなければ３属性量間の線形式の関係を満たすはずであり，その時以下の関係式が成り立つ．

$$1 = -b_{ij}b_{jk}b_{ki}$$

このような検定を "*triplet test*" という．これによって互いの無矛盾性が明らかになった式同士は１つの関係式にマージ可能である．この例では

$$x_i + b_{jk}b_{ki}x_j + b_{ki}x_k = \Pi_{ijk}$$

とマージされる．同様にして他の属性量 x_h と $\{x_i, x_j, x_k\}$ の中の任意の２個との３式の組についてすべて無矛盾であれば，更に４属性量の関係にまとめられる．この "*triplet test*" の部分は $O(n^3)$ の複雑さを有する。このように法則式探索の早い段階において，定理 2の数学的許容制約を用いて多数の属性量を少数の *regime* 式に基づく無次元量 $\{\Pi_i | i = 1, ..., n-r-s\}$ に少ない計算量でまとめることにより，法則式探索全体の計算量を節減することができる．

以上のように属性量をすべて無次元な属性量に集約後，*ensemble* 式の探索を開始する．前述のように *ensemble* 式は任意の形式を持ち得るため，すべての可能な形式を探索することは困難である．しかしながら，多くの学問体系において見られる法則式の殆どが，初等解析的な形式をしているという経験的事実に基づき，本研究では探索の範囲を算術演算と初等関数で構成される式に限定する．この制限は，測定属性量間の関係式を探索発見する他の多くのシステムにおいて用いられている (Falkenhainer & Michalski, 1985)．本研究では，和，積，２重線形式，指数関数関係など算術演算と初等関数の範疇で可能な２属性量間の関係式を形式候補集合 CE として与える方法を取る．CE 内の各候補式を "*bi-variate test*" によって２つの属性量の関係に当てはめ，成立すればそれを１つの新たな属性量項としてまとめる．２属性量の関係で成立するものが見つからなければ，CE 内の関係式を２回以上適用して３属性量以上の関係式の候補を生成し，それらについて同様に探索を行う．n 属性量間の関係まで探索を行う場合には，CE の濃度を $|CE|$ とした時，最大 $O(|CE|^n)$，すなわち指数オーダーの複雑さの計算を必要とする．

上記何れのテストにおいても，各関係式が実験データについて成立するか否かを判定するには，ノイズや誤差の影響を考慮し F-検定や χ^2- 検定を用いる．我々はこのようなテストに基づく法則式導出アルゴリズムの検討を行った (Washio & Motoda, 1997)．アルゴリズムの概要を以下にまとめる．

間隔尺度の属性量の集合 IQ，比例尺度の属性量の集合 RQ，絶対尺度の属性量の集合を AQ とする．

(1-1)IQ 内の全ての属性量ペアについて，許容され

る線形関係式の “*bi-variate test*” を行う．そして，採択された２属性量関係式をリスト IE に含め，棄却された属性量ペアをリスト NIE に含める．

(1-2) IE 内の互いに関連している各３つ組みの関係式について “*triplet test*” を行う．採択された３つ組みについて，全ての極大凸集合 MCS を導き，各 MCS 内の２属性量関係式を１つの多変数式に組み上げる．組み上げられた各多変数式を新たな１つの項とし，IQ から各多変数式に含まれる属性量を除く代わりにこれら新たな項をつけ加える．そして，$RQ = RQ + IQ$ とする．

(2-1) RQ 内の全ての属性量ペアについて，許容される積関係式の “*bi-variate test*” を行う．そして，採択された２属性量関係式をリスト RE に含め，棄却された属性量ペアをリスト NRE に含める．

(2-2) RE 内の互いに関連している各３つ組みの関係式について “*triplet test*” を行う．採択された３つ組みについて，全ての極大凸集合 MCS を導き，各 MCS 内の２属性量関係式を１つの多変数式に組み上げる．組み上げられた各多変数式を新たな１つの項とし，RQ から各多変数式に含まれる属性量を除く代わりにこれら新たな項をつけ加える．

(2-3) RQ 内の間隔尺度属性量の線形関係式を表す項と他の属性量・項との全てのペアについて，許容される対数関係式の “*bi-variate test*” を行う．そして，採択された各２属性量関係式を新たな１つの項とし，RQ から各２属性量関係式に含まれる属性量を除く代わりに，これら新たな項をつけ加える．

(3) $AQ = AQ + RQ$ とする．“*ensemble* 式” における関係式の候補集合 CE について，はじめに $i = 2$ として新たな項が生成できなくなるまで以下を繰り返す．AQ 内の全ての i 属性量の組について，CE に含まれる各関係式を $i-1$ 回適用して得た関係式の当てはめを行い，その成立をテストする．そして，成立するすべての関係式をリスト AE に含める．成立した i 属性量の関係式を１つの項に置き換えて表すことが可能な場合には，AQ においてその i 属性量を１つの項に置き換え，かつ $i = 2$ とする．そうでなければ $i = i + 1$ とする．

対象系の法則式またはそれらによって構成されるモデルは，AE 内の関係式を AQ 内の項を使って展開することにより得られる．

上記，ステップ (1-1),(1-2) では，間隔尺度について前述の “*bi-variate test*” と “*triplet test*” による関係の同定とまとめ上げを行う．ここで極大凸集合 MCS は，それに含まれる何れの３つ組みも “*triplet test*” で採択される属性量の集合である．ステップ (2-1),(2-2) では，既にまとめられた間隔尺度量グループや比例尺度量に関して，同様な検定と更なるまとめあげが行われる．そして最後のステップ (3) ではここまでにまとめられた属性量グループと絶対尺度量について，更なるボトムアップのまとめあげが行われる．

6. 構成的法則発見の適用と評価

上述のアルゴリズムを実装した検証用プログラムを構築した．検証用プログラムは実験環境シミュレータが有する対象式を知らずに，シミュレータを実験操作して種々の属性量の値の組みを表すデータを取得する．はじめに図 3に示される３石トランジスタからなる一定時間内の光量増加率を測定する回路について，性能検証を行った．この系は以下の 18 属性量からなる式で表される．

$$\left(\frac{R_3 h_{fe_2}}{R_3 h_{fe_2} + h_{ie_2}} \frac{R_2 h_{fe_1}}{R_2 h_{fe_1} + h_{ie_1}} \frac{rL^2}{rL^2 + R_1}\right)(V_1 - V_0) - \frac{Q}{C} - \frac{K h_{ie_3} X}{B h_{fe_3}} = 0 \quad (7)$$

ここで，L, r は光量と光素子 Csd の感度，X, K, B は表示電流計針の位置，針バネの定数，磁石磁場の強さを表す．また，h_{ie_i}, h_{fe_i} は，それぞれ i 番のトランジスタのベース入力インピーダンスと電流増幅率を表す．更に V_0, V_1 は電源の正極，負極の電位，R_i は各抵抗の抵抗値，C, Q はコンデンサの容量，蓄積電荷を表す．ここで，電位は間隔尺度及び電流増幅率は無次元量であるため，$RQ = \{L, r, R_1, R_2, R_3, h_{ie_1}, h_{ie_2}, h_{ie_3}, Q, C, X, K, B\}$ が比例尺度の集合，$IQ = \{V_1, V_2\}$ が間隔尺度の集合，$AQ = \{h_{fe_1}, h_{fe_2}, h_{fe_3}\}$ が絶対尺度の集合となる．

まず前述のアルゴリズムのステップ (1-1) で，実験データから間隔尺度である V_1 と V_2 の関係の “*bi-variate test*” が行われ，$\Pi_1 = V_1 - V_0$ が得られた．ステップ (1-2) では IQ が３数量以上含まないので，そのまま V_1 と V_2 は Π_1 としてまとめられた．次に

ステップ (2-1),(2-2) において，RQ 内の数量及び Π_1 の間の “*bi-variate test*” が行われ，２数量間関係の集合 RE が

$$RE = \{L^{(1.999\pm0.010)}r = b_1, L^{(-1.999\pm0.010)}R_1 = b_2, r^{(-1.000\pm0.010)}R_1 = b_3, R_2^{(-1.000\pm0.010)}h_{ie_1} = b_4, R_3^{(-1.000\pm0.010)}h_{ie_2} = b_5, Q^{(-1.000\pm0.010)}C = b_6, h_{ie_3}^{(1.000\pm0.010)}X = b_7, h_{ie_3}^{(1.000\pm0.010)}K = b_8, h_{ie_3}^{(-1.000\pm0.010)}B = b_9, X^{(1.000\pm0.010)}K = b_{10}, X^{(-0.999\pm0.010)}B = b_{11}, K^{(-1.000\pm0.010)}B = b_{12}\}$$

と得られた．そして “*triplet test*” により互いに整合な極大凸集合 MCS が求められ，それに従って以下の “*regime* 式” が導出された．

$$\{\Pi_1 = V_1 - V_0, \Pi_2 = R_1 r^{-1.0}L^{-2.0}, \Pi_3 = h_{ie_1}R_2^{-1.0}, \Pi_4 = h_{ie_2}R_3^{-1.0}, \Pi_5 = h_{ie_3}XKB^{-1.0}, \Pi_6 = QC^{-1.0}\}$$

ステップ (2-3) では，該当する対数関係式が見つからなかったため，そのまま処理がスキップされた．そしてステップ (3) において，これらの Π と AQ 内の無次元量同士の２属性量の関係として，候補集合 CE から成立する関係式をデータから探し出し以下を得た．

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \Pi_2 h_{fe_1} = R_1 r^{-1.0}L^{-2.0}h_{fe_1},\\
\Theta_2 &= \Pi_3 h_{fe_2} = h_{ie_1}R_2^{-1.0}h_{fe_2},\\
\Theta_3 &= \Pi_4 h_{fe_3} = h_{ie_2}R_3^{-1.0}h_{fe_3},\\
\Theta_4 &= \Pi_5 + \Pi_6 = h_{ie_3}XKB^{-1.0} + QC^{-1.0},\\
\Theta_5 &= \Pi_1\Theta_4^{-1.0}\\
&= (V_1 - V_0)(h_{ie_3}XKB^{-1.0} + QC^{-1.0})^{-1.0}
\end{aligned}$$

従って AQ の内容は集約され $AQ = \{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_5\}$ となる．更にこれらの内，３属性量の関係として候補集合 CE 内の２重線形式を２回適用して得る関係式のデータ当てはめ探索を行い，

$$\begin{aligned}
\Theta_6 &= (\Theta_1\Theta_2 + \Theta_1 + \Theta_2)\Theta_3 +\\
&\quad (\Theta_1\Theta_2 + \Theta_1 + \Theta_2) + \Theta_3
\end{aligned}$$

という多重線形関係を得た．これにより AQ の内容は $AQ = \{\Theta_5, \Theta_6\}$ と集約されるが，２属性量の関係として候補集合 CE からデータを通じて

$$\Theta_5 + \Theta_6 = 1$$

の成立が同定された．これに先に求まった一連の式を本式に代入すれば，法則式から構成される対象回路モデル式 (7) が得られる．このアルゴリズムはボトムアップに属性量を組み合わせるため，中間段階では各 Π や $Theta$ は無次元にはならないが，最終的には本来の法則式を反映したモデルが得られることが確認された．

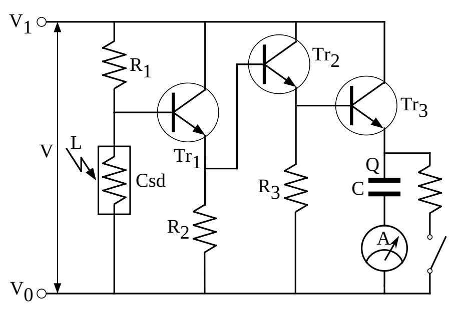

図 3　光測定の電子回路
Fig. 3　A circuit of photo-meter.

更に物理法則以外の分野についても適用を試みた．音の周波数 f とそれに対して人間が感じる音程 I の関係は Fecher の法則として知られるが，前者は比例尺度，後者は間隔尺度であることが第３章で述べた公理論的尺度分類により知られる．これに基づいて以下の２種類の関係式候補が得られた．

$$I = \alpha f^{\beta} + \gamma,\ \text{or}\ I = \alpha \log f + \beta$$

この内，後者が Fechner の法則に合致する．また別の例として，部屋の容積 R とその中で我々が居る位置の照度 L_p，同じくそこから見た窓の立体角 W_p に関して，我々が感じる部屋の開放感 S_p が以下の式で関係づけられるとされている (Kan, Miyata & Watanabe, 1972)．

$$S_p = cRL_p^{0.3}W_p^{0.3},$$

ここで S_p はマグニチュード推定法によって被験者から得られ，尺度分類によれば比例尺度となる．その他の物理的属性量は R, L_p が比例尺度，W_p が絶対尺度である．これについて本アルゴリズムを適用したところ，上記の式が正確に求められた．

表 3に種々の例に関する本アルゴリズムの計算量評価結果をまとめる。理想気体状態方程式の導出に関する結果を基準にした場合の相対的な CPU 計算時間が示されている．比較のために，本研究で提唱した数学的許容制約を用いずに，種々の数式形式の組み合わせについて “*bi-variate test*” を通じた虱潰し探索を行う ABACUS と呼ばれる従来型の関係式探索発見システムの計算量を掲載した (Falkenhainer et al, 1985)．これらの例では，本アルゴリズムの計算量はおおむね法則式に含まれる属性量数の２乗に比例する．これは法則式に含まれる *regime* 式の数が何れも高々数個程度であることと，初等解析的

関係に絞った *ensemble* 式の探索にそれほどの計算量を要しないことにもよるが，また試行実験やデータフィッティングなど支配的な計算量を有する処理を含み $O(n^2)$ の複雑さを有する "*bi-variate test*" が多くを占めることによる．これに対し，従来型のものはアルゴリズムが全体として NP-困難であるために計算時間の爆発を生じてしまい，属性量数が 10 を超える電子回路の例の問題規模では，検証可能な時間内に解を得ることはできなかった．これに対し本アルゴリズムでは，提唱した法則式の数学的許容制約と "*triplet test*" を用いることで，処理の初期段階で探索空間が効果的に削減されるため，最後の *ensemble* 式の探索部分での NP-困難性が顕在化しにくい．

また，表の右端列には，各属性量の統制と測定に人工的に混入したガウスノイズに対する本アルゴリズムのロバスト性が示されている．各々の事例について１０回の評価を行い，その内８回以上正しい式が得られるために許容されたノイズ振幅標準偏差の属性量値に対する相対値を示している．従来型の ABACUS は，僅かな実験ノイズに対しても極めて脆弱であることが報告されているのに対し，本アルゴリズムがかなり複雑な法則式に関しても非常にロバストな結果を与えることが示されている．これは本アルゴリズムが "*bi-variate test*" という２属性量ずつの単純な関係のみを実験で求めることに加えて，" *triplet test*" と法則式の数学的許容制約を用いることで，見かけ上は当てはまるが制約に合致しない虚偽の関係式を効果的に排除し得る寄与が大きいと考えられる．

以上のように提唱する方式では，10 属性量を超える比較的規模の大きい問題に関しても，法則式やそれによって構成されるモデル式を実際的な条件で発見可能である．10 属性量を超える規模の対象事象をまとめて一度にモデル化することは，通常，科学者や技術者にとっても困難な場合が多く，本研究のような体系的手法を採用するメリットは大きい．

表 3 計算量とノイズロバスト性に関する評価
Table 3 Complexity and robustness

例	n	TC(S)	TC(A)	NL(S)
Fechner	2	0.34	-	±45%
開放感	4	1.06	-	±40%
理想気体	4	1.00	1.00	±40%
運動量保存	8	6.14	22.7	±35%
Coulomb	5	1.63	24.7	±35%
Stoke's	5	1.59	16.3	±35%
運動エネルギ	8	6.19	285.	±30%
電子回路	18	21.9	-	±20%

n: 属性量の数, TC(S): CPU 計算時間, TC(A): 比較対象 ABACUS の CPU 計算時間, NL(S): ノイズ許容限界．

7. おわりに

本論文では，はじめにある対象現象において測定される属性量間に成り立つ関係式が，法則式であるための諸条件を考察した．そして，その中でも数学的許容性と呼ばれる条件を詳細に分析した．特に関係式を構成する各属性量の尺度タイプの定義，分類に関して公理論的定式化を導入し，更にそれらを従来の単位次元解析の知見と統合して拡張定理を得た．これによって，法則式としての性質を保存する属性量の表象の変換の内容が明らかになった．

また，これら諸条件の考察と拡張定理の成果を基に，法則式候補を実験データから自動的に導出可能なアルゴリズムを構成し，種々の対象現象に対してシミュレーション評価を試みた．その結果，本論文が検討した種々の原理の妥当性が検証され，実験や観測によって得られる属性量の関係に関して，単なる実験式ではない法則式となる候補を体系的に見つけだす方法の体系を得ることができた．

文 献

片山 功蔵 (1986). 伝熱工学資料，I. 基礎編，２章. 片山 功蔵 (編)，55–56. 日本機械学会.

Feynman,R.P. (1965). *The Character of Physical Law*. Charles E. Tuttle Co. Inc.

Descartes,R. (1637). *Discours de la Methode*. (落合太郎 訳 (1967). 方法序説. 岩波書店.).

Newton, I. (1686). *Principia* Vol.II The System of the World. (Translated into English by A. Motte (1729) & London, England: University of California Press, Ltd. (Copyright 1962)).

Simon, H. A. (1977). *Models of Discovery*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Bridgman, P. W. (1922). *Dimensional Analysis*. New Haven, CT: Yale University Press.

Buckingham, E. (1914). On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations. *Physical Review*, **IV** (4), 345–376.

Akaike,H. (1974). A New Look on the Statistical Model Identification . *IEEE Trans.*, **AC-19** 716–723.

Rissanen, J. (1978). Modeling by shortest data description . *Automatica*, **14** 465–471.

Stevens, S. S. (1946). On the Theory of Scales of Measurement. *Science*, **103** (2684), 677–680.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P. & Tversky, A. (1971). *Fundations of Measurement* Vol.1. NY: Academic Press.

Luce, R. D. (1959). On the Possible Psychological Laws. *The Psychological Review*, **66** (2), 81–95.

Washio, T. & Motoda, H. (1997). Discovering Admissible Models of Complex Systems Based on Scale-Types and Identity Constraints. Proc. of Fifteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-97), **Vol.2** 810–817.

Kan, M., Miyata, N. & Watanabe, K. (1972) Research on Spaciousness. *Japanese Journal of Architechture*, No.193, 51–57.

Falkenhainer,B.C. & Michalski,R.S. (1986)Integrating Quantitative and Qualitative Discovery: The ABACUS System. *Machine Learning*, 367–401, Boston, MA:Kluwer Academic Publishers.

(1998 年 1 月 1 日受付)
(1998 年 1 月 1 日採録)

鷲尾 隆 (正会員)

1960 年生．1983 年東北大学工学部原子核工学科卒業．1988 年東北大学大学院原子核工学専攻博士課程修了．工学博士．1988 年から 1990 年にかけてマセチューセッツ工科大学原子炉研究所客員研究員．1990 年（株）三菱総合研究所入社．1996 年退社．現在，大阪大学産業科学研究所助教授（知能システム科学研究部門）原子力システムの異常診断手法に関する研究，定性推論に関する研究を経て，現在は人工知能の基礎研究，特に科学的知識発見，データマイニングなどの研究に従事．著書に“*Expert Systems Applications within the Nuclear Industry*”, American Nuclear Society,「知能工学概論」: 第 2 章エージェント（共著，廣田 薫 編，昭晃堂）など．人工知能学会，計測自動制御学会，日本ファジイ学会，日本原子力学会，AAAI，各会員．

元田 浩 (正会員)

1943 年生．1965 年東京大学工学部原子力工学科卒業．1967 年東京大学大学院原子力工学専攻修士課程修了．同年（株）日立製作所入社．同社中央研究所，原子力研究所，エネルギー研究所，基礎研究所を経て 1995 年退社．現在，大阪大学産業科学研究所教授（知能システム科学研究部門）原子力システムの設計，運用，制御に関する研究，診断型エキスパート・システムの研究を経，現在は人工知能の基礎研究，特に機械学習，知識獲得，知識発見などの研究に従事．工学博士．認知科学会，人工知能学会，情報処理学会，日本ソフトウエア科学会，AAAI, IEEE Computer Society，各会員．